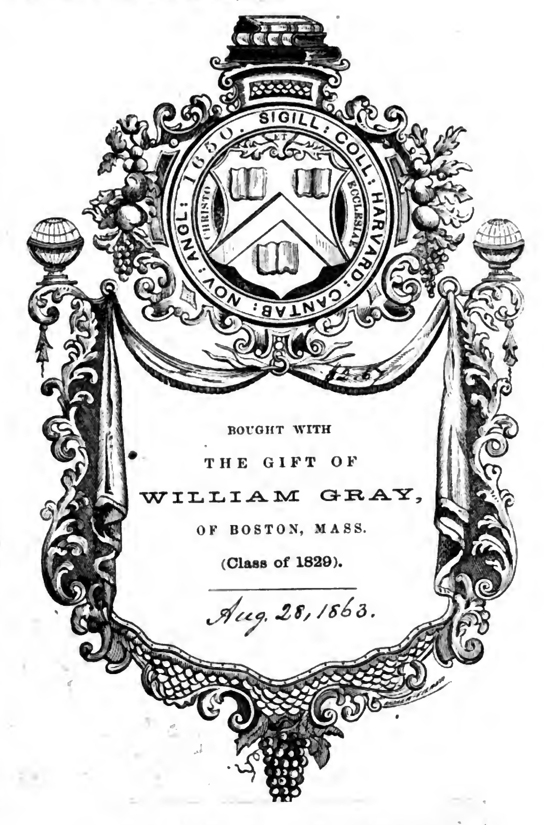
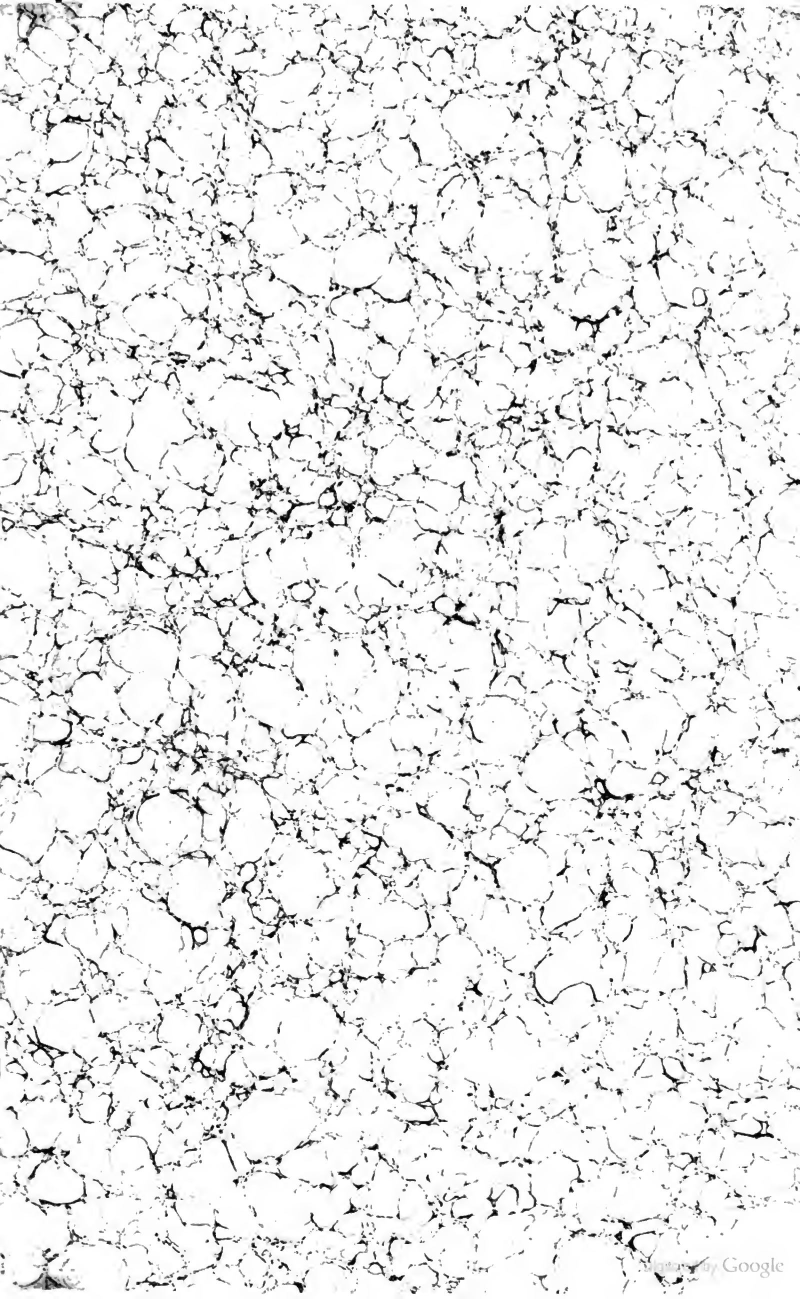



SIGILL: COLL: HARVARD: CANTAB: NOV: ANGL: 1650.
CHRISTO ET ECCLESIAE
BOUGHT WITH
THE GIFT OF
WILLIAM GRAY,
OF BOSTON, MASS.
(Class of 1829).
Aug. 28, 1863.



Einleitung

in die

Infinitesimal-Rechnung

(Differential- und Integral-Rechnung)

zum

Selbstunterricht.

Mit Rücksicht auf das Nothwendigste und Wichtigste.

Von

H. B. Lübsen.

Mit 53 Figuren im Text.

Zweite verbesserte und vermehrte Auflage.

Leipzig:

Friedrich Brandstetter.

1862.

Vorwort zur ersten Auflage.

Mehrseitig, sowohl mündlich, brieflich, als auch öffentlich dazu aufgefordert, übergebe ich hiemit dem Publicum die von mir verlangte Einleitung in die Infinitesimal-Rechnung.

Wie der Titel besagt, ist diese Arbeit für Anfänger und zum Selbstunterricht bestimmt und, wie ich es für angemessen hielt, auf die Theorie der Reihen gegründet, weil diese ältere Methode nicht allein von den ersten Anfängern viel leichter zu fassen ist, sondern auch natürlicher scheint. Ich folge hierin nicht allein meiner eigenen Ansicht, als vielmehr noch dem Urtheil eines Mannes, Hansen, der, wie er öfters bewiesen hat, das Newton'sche Riesenschwert, wie Whewell die Infinitesimal-Rechnung nennt, wohl zu heben und zu führen weiss.

Cauchy's classisches Werk ist nicht für den Anfänger und zum Selbstunterricht, sondern nur für Leser geschrieben, welche mit der Infinitesimal-Rechnung bereits schon vertraut sind. Um sich von der völligen Richtigkeit dieser Behauptung zu überzeugen, braucht man nur Cauchy's Werk: **„Leçons de calcul différentiel et de calcul intégral, rédigées par M. l'Abbé Moigno,"** in die Hand zu nehmen.

Hamburg, im Juni 1855.

Lübsen.

Vorwort zur zweiten Auflage.

Die auf dem Titelblatt erwähnte Verbesserung dieser neuen Auflage besteht hauptsächlich in der Ausmerzung der Druckfehler und die erwähnte Vermehrung in dem Versuch einer Metaphysik des unendlich Kleinen, um der ursprünglichen Leibnitz'schen Infinitesimalmethode auf's Neue wieder Geltung und Eingang zu verschaffen. Die sogenannte Grenzmethode ist jedoch unverändert beibehalten und es ist somit dem Leser ganz überlassen, für welche dieser beiden Methoden er sich am meisten interessiren will.

Altona, im November 1861.

Lübsen.

Erster Theil.

Differential-Rechnung.

„Ich sehe mit Bewunderung und Erstaunen die Fruchtbarkeit dieser Wissenschaft. Nach welcher Seite ich meinen Blick richte, entdecke ich neue Anwendungen derselben. Ich erkenne in ihr einen Fortgang und eine Speculation, die in's Unendliche führt." Huyghens.

Einleitung.

1.

Keine der mathematischen Wissenschaften hat den Anfängern so viele Schwierigkeiten und Dunkelheiten bereitet und so viele gelehrte Streitigkeiten über ihre Evidenz veranlasst, als die von den grossen Denkern Newton und Leibnitz erfundene Differential- und Integral-Rechnung, oder, wie man beide auch wohl mit einem einzigen Namen zu benennen pflegt, als die Analysis des Unendlichen (Infinitesimalrechnung), die höchste und schönste der gesammten mathematischen Wissenschaften, aber in der That auch die schwerste, sowohl zu lehren als zu lernen, was schon daraus folgt, dass von zehn, die sie studiren, kaum einer sie verstehen und noch viel weniger sie selbstständig anwenden lernt.

2.

In der Einleitung zur Trigonometrie haben wir hervorgehoben, welche Umstände diese Wissenschaft angeregt, nämlich: das practische Bedürfniss, aus den in Zahlen gegebenen Stücken eines

Dreiecks die dadurch bestimmten möglichst genau zu finden, was der Geometrie allein nicht möglich ist. Der pythagoräische Lehrsatz und die Theorie über Aehnlichkeit der Dreiecke bilden offenbar das Fundament der Trigonometrie. Aber die Trigonometrie, obgleich auf jenem Fundamente sich stützend, bildet doch eine ganz besondere Wissenschaft für sich, durchaus verschieden von den beiden Wissenschaften Geometrie und Arithmetik, worin sie ihre Wurzeln hat. Denn ein neuer Grundgedanke musste, wenn diese neue Wissenschaft entstehen sollte, durchaus erst gefasst werden, nämlich der der trigonometrischen Functionen, mithin auch ganz neue Begriffe, Zeichen und Kunstwörter gebildet werden. Daher auch — weil der Uebergang von der Geometrie zur Trigonometrie nicht allmählig, sondern gleichsam durch einen Sprung geschieht — die anfängliche Fremdartigkeit und Schwierigkeit, welche die Trigonometrie für den ersten Anfänger zu haben pflegt.

3.

Von der Trigonometrie zur höhern Geometrie findet ebenfalls kein allmähliger Uebergang Statt. Auch hier wird der Anfänger plötzlich in ein ganz fremdes Gebiet versetzt. Nur ein ganz neuer, von einem grossen Genie gefasster Grundgedanke konnte diese neue Wissenschaft begründen. Die für den ersten Augenblick ganz unlogisch scheinende Vorstellung: die räumlichen Grössen arithmetisch (durch Zahlen) aufzufassen, muss den Anfänger sehr befremden. Hierzu kommen nun die neuen Begriffe von stetigen und unstetigen Functionen veränderlicher Grössen etc.

4.

Ebenso verhält es sich nun mit der Infinitesimalrechnung. Wiederum ein neuer Grundgedanke hat diese neue Wissenschaft hervorgerufen und es ist hier noch viel schwerer sich mit den neuen Begriffen vertraut zu machen und sich an die neuen Zeichen und Kunstwörter zu gewöhnen. Dessen ungeachtet wollen wir versuchen, den Leser, so wie in die vorhergehenden mathematischen Wissenschaften, auch in dieses neue Gebiet der Mathematik einzuführen und ihn allmählig an das neue Licht zu gewöhnen, welches in der ganzen Fülle, wie es aus den Häuptern der ersten Erfinder hervorbrach, ihn blenden würde. Bei diesem unsern Versuche müssen wir aber die analytische Geometrie und die Analysis als bekannt voraussetzen.

5.

Gleich nachdem Cartesius zuvor gezeigt hatte, wie die ebenen räumlichen Gestalten durch Functionen zweier veränderlichen Grössen (Abscisse und Ordinate) arithmetisch aufgefasst werden können und umgekehrt, wenn eine solche Function gegeben wird, die darin enthaltene Gestalt darnach construirt werden kann, musste man auch bald auf den sehr nahe liegenden Gedanken kommen: dass in einer solchen Function einer räumlichen Grösse nothwendig auch schon alle Eigenschaften derselben enthalten, und dass die Möglichkeit vorhanden sein müsse, diese Eigenschaften aus der Function selbst abzuleiten, z. B. die Lage und Grösse der Tangente, Normale etc. für einen bestimmten Punct; die Stellen, wo eine krumme Linie sich wendet, von Concavität in Convexität oder umgekehrt übergeht; die Puncte, wo die Ordinate ihr Maximum oder Minimum erreicht, ferner die Länge und Fläche einer krummen Linie für eine gegebene Abscisse etc.

6.

Aber keines dieser Probleme konnte durch die gewöhnliche Algebra gelös't werden. Man fühlte, dass dazu erst eine ganz neue Art Analysis, die Infinitesimalrechnung, erfunden werden müsse. Denn diese erwähnten Probleme und namentlich das erste: die Lage der durch einen bestimmten Punct gedachten Berührungslinie aus der Gleichung der Curve zu bestimmen, sind es grade, welche die Erfindung der Differentialrechnung veranlasst haben. Denn, dass die Methode, nach welcher wir in der analytischen Geometrie an die sogenannten Kegelschnitte Berührungslinien gezogen haben, nur auf diese, nämlich auf krumme Linien zweiten Grades und auf keine höhern Grades anwendbar ist, ist von selbst klar.

7.

Um nun zu zeigen, wie Leibnitz und Newton sich hier durch die Erfindung ihrer neuen Wissenschaft, die Infinitesimalrechnung, neue Bahn brachen und zugleich die allmählige Entstehung dieser Wissenschaft, ihr Hervorkriechen aus dem Ei, unverhüllt darzulegen und dadurch den Anfänger an dem Vergnügen des Schaffens und Selbsterfindens Theil nehmen zu lassen, wollen wir, der geschichtlichen Entwickelung dieser Wissenschaft folgend, das erste Problem vorlegen, welches sie, wie gesagt,

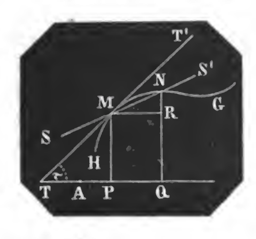
veranlasst hat, nämlich das Problem der Tangentenziehung, und sehen, auf welche sinnreiche Weise zunächst dieses gelös't wurde.

Sei deshalb:
$$y = \frac{x^3}{3} - 2x^2 + 3x + 5$$
die Gleichung einer krummen Linie, der Bogen HMG ein Stück derselben,*) und die Aufgabe: durch einen bestimmten, durch seine Coordinaten AP $= x$, MP $= y$ gegebenen Punct, M, eine Berührungslinie an dieselbe zu ziehen, d. h. die Neigung (τ) derselben gegen die Abscissenlinie zu finden, woraus sich dann das Uebrige: Subtangente, Normale etc. ergiebt.

8.

Versteht man nun wieder, wie in der analytischen Geometrie festgesetzt, unter Berührungslinie im Puncte M, diejenige Linie TT[1], welche aus der durch denselben Punct M gedachten beliebigen Secante SS[1] entsteht, wenn diese sich so weit um den Punct M dreht, bis der andere Durchschnitts-Punct N mit M zusammenfällt, so kann man auf folgende Weise die Lage der Tangente gegen die Abscissenlinie oder den Winkel τ sehr leicht aus der Gleichung finden.

Die Lage der Tangente MT ist offenbar durch die als gegeben gedachte Abscisse AP $= x$ bestimmt, weil, vermöge der gesonderten Gleichung, durch eine bestimmte Abscisse AP $= x$ auch die zugehörige Ordinate MP $= y$ bestimmt ist.



Ich lasse nun die Abscisse AP $= x$ um ein Stück PQ $= \Delta x$**) (dessen Grösse nicht weiter bestimmt zu werden braucht) wachsen, (die Abscisse x, also auch die Function y, gleichsam fliessen) so gelange ich dadurch, indem ich in die vorliegende Gleichung:

$$y = \frac{x^3}{3} - 2x^2 + 3x + 5 \ldots\ldots (1)$$

*) Diese Linie ist, so wie ihre Function, eine stetige. Steht, wie hier, die abhängig veränderliche Grösse (y) auf einer Seite allein, so heisst die Function eine gesonderte, im Gegensatze zu den Functionen, welche sich wegen der Schwierigkeiten der höhern Gleichungen nicht auf die abhängig veränderliche Grösse reduciren lassen und die man deshalb verwickelte Functionen nennt.

**) Man muss sich diese Hülfsgrösse Δx, welche nur als Mittel dient, die Rechnung einzufädeln und die aus derselben wieder herausfällt, nicht als zwei

$x + \Delta x$ statt x setze, zu einem anderen Punct N, der krummen Linie, dessen Ordinate $NQ = y + \Delta y$ ist (indem wir das Wachsthum von y, nämlich NR, mit Δy bezeichnen. *) Man hat also für den Punct N die Gleichung:

$$y + \Delta y = \frac{(x+\Delta x)^3}{3} - 2(x + \Delta x)^2 + 3(x + \Delta x) + 5$$

oder entwickelt und nach steigenden Potenzen von Δx geordnet:

$$y+\Delta y = \left(\frac{x^3}{3} - 2x^2 + 3x + 5\right) + (x^2 - 4x + 3) \cdot \Delta x + (x-2)\Delta x^2 + \tfrac{1}{3} \cdot \Delta x^3 \ldots (2)$$

Um das Wachsthum von y zu erhalten, welches offenbar von dem in (1) für x anzunehmenden bestimmten Werthe und von dem Zuwachs desselben, Δx, abhängt, ziehen wir von diesem neuen Zustand der Function den alten ab, nämlich (1) von (2), so hat man:

$$\Delta y = (x^2 - 4x + 3) \cdot \Delta x + (x - 2) \cdot \Delta x^2 + \tfrac{1}{3} \cdot \Delta x^3 \ldots . (3)$$

Wären nun x und Δx gegeben, so könnte die dadurch bestimmte Differenz (Wachsthum) von y, nämlich Δy, nach dieser Gleichung (3) berechnet werden.

Ebenso ist einleuchtend, dass auch, beiderseits durch Δx dividirt, der sogenannte Differenzen-Quotient, nämlich:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = x^2 - 4x + 3 + (x - 2) \cdot \Delta x + \tfrac{1}{3} \cdot \Delta x^2 \ldots\ldots . (4)$$

durch x und Δx völlig bestimmt und die trigonometrische Tangente des Winkels ist, welche die durch M, N gehende Secante SS^1 mit der Abscissenlinie macht.

9.

Man stelle sich nun vor: die Ordinate $NQ = y + \Delta y$ fliesse, parallel mit sich selbst, wieder zurück, bis sie mit $MP = y$ zusammenfällt, so wird zu gleicher Zeit die Grösse $MR = \Delta x$ (welche nur als Hülfsgrösse angenommen, um die Rechnung einzuleiten)

Factoren Δ und x, sondern nur als einen einzigen Buchstaben (Zeichen) denken, deshalb kann man auch statt $(\Delta x)^2$, $(\Delta x)^3$ etc. kurz Δx^2, Δx^3 etc. schreiben.

*) Wir nehmen bei unserer Figur an, dass die Ordinate NQ grösser als MP ist. Im umgekehrten Fall wäre das Wachsthum (Increment) von y, nämlich Δy, negativ (ein Decrement). Man nennt aber Δy, es möge positiv oder negativ sein, immer Wachsthum der Function.

immerfort abnehmen und zuletzt $= 0$ werden. Während dieses geschieht, dreht sich zugleich auch die Secante SS^1 um den Punct M und fällt für $\Delta x = 0$ mit der Berührungslinie TT^1 zusammen. Der erwähnte Differenzen-Quotient $\frac{\Delta y}{\Delta x}$, d. h. die Reihe (4) verliert für diesen Fall (nämlich $\Delta x = 0$) alle in Δx multiplicirten Glieder und erhält den dadurch bestimmten Grenzwerth:

$$\tfrac{0}{0} = x^2 - 4x + 3 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (5)$$

und dieser Grenzwerth muss nothwendig die genaue trigonometrische Tangente des Winkels τ sein, welchen die Berührungs linie TT^1 mit der Abscissenlinie macht, nämlich:

$$\operatorname{tg} \tau = x^2 - 4x + 3$$

Für $x = 4$ z. B. wäre $\operatorname{tg} \tau = 3$; für $x = 2$ ist $\operatorname{tg} \tau = -1$; für $x = -2$ ist $\operatorname{tg} \tau = 15$; für $x = 1$ und für $x = 3$ ist $\operatorname{tg} \tau = 0$. In den beiden letztern Fällen ist also auch $\tau = 0$ und die Berührungslinien laufen mit der Abscissenlinie parallel.

Das in Gleichung (5) linker Hand stehende Zeichen $\frac{0}{0}$ ist schon in der Analysis § 79 vorgekommen und kann nicht befremdend sein. Jedenfalls ist klar, dass der Quotient $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ in (4), so lange Δx noch einen, wenn auch noch so kleinen angebbaren Werth hätte, wohl näherungsweise, aber doch nicht genau die trigonometrische Tangente des gesuchten Winkels τ geben könnte, dass aber die Secante SS^1 mit der Tangentiallinie TT^1 wirklich zusammenfällt, wenn wir in (4) $\Delta x = 0$ setzen und dass dann, vermöge Gleichung (3), auch $\Delta y = 0$ wird.

Aus der gefundenen trigonometrischen Tangente des Winkels τ erhält man dann leicht die Subtangente, Subnormale etc. (Analyt. Geometrie § 44, 6.)

10.

Versuchen wir jetzt diese vorläufig auf einen besonderen Fall angewandte Methode der Tangenten zu verallgemeinern. Sei deshalb allgemein:

$$y = F(x) \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (1)$$

irgend eine gesonderte und stetige Function und HG ein Stück der ihr entsprechenden krummen Linie und die Lage der durch einen Punct, M, gedachten Berührungslinie zu bestimmen.

Sei $AP = x$ die Abscisse und $MP = y = F(x)$ die Ordinate des Punctes M.

Lassen wir die Abscisse x um $PQ = \Delta x$ wachsen, so wird auch y ein Wachsthum, $NR = \Delta y$, erhalten und wir haben dann, indem wir in (1) $x + \Delta x$ statt x setzen, für den neuen Zustand der Function, in Zeichen:

$$y + \Delta y = F(x + \Delta x) \ldots\ldots\ldots\ldots (2)$$

Nun wird sich gleich zeigen, dass uns die (eben deshalb vorausgeschickten) Lehren der Analysis hinreichende Mittel an die Hand geben, jede bestimmte Function einer zweitheiligen Grösse $F(x+\Delta x)$ immer in eine Reihe zu entwickeln, wovon das erste Glied die ursprüngliche Function $F(x)$ selbst ist und die folgenden Glieder nach ganzen positiven Potenzen des Increments Δx fortschreiten, so dass nämlich die Gleichung (2) sich verwandelt in:

$$y + \Delta y = F(x) + p \cdot \Delta x + M \cdot \Delta x^2 + N \Delta x^3 + \ldots (3)$$

und wo die Coefficienten p, M, N.... im Allgemeinen Functionen von x sind.*)

Dass übrigens das erste Glied der Reihe die ursprüngliche Function $F(x)$ selbst sein muss, könnte man schon mit Lagrange daraus schliessen, dass für $\Delta x = 0$ der neue Zustand der Function auf den alten wieder zurückgehen muss. Setzt man nämlich in (3) $\Delta x = 0$, so ist auch $\Delta y = 0$ und man erhält dann wieder die Gleichung (1) nämlich $y = F(x)$. Dies ist jedoch nur beiläufig bemerkt, indem die jedesmalige Möglichkeit der behaupteten Entwickelung von $F(x+\Delta x)$ sich ganz einfach aus den Lehren der Analysis ergiebt. Um aber Wiederholungen zu vermeiden und, wie es in unserm Plan liegt, den Anfänger auf die Spur leiten zu können, den Beweis für diese Behauptung selber zu finden, nehmen wir für den Augenblick an, dass die obige Reihe (3), die den Umständen nach endlich oder unendlich sein kann, Statt findet, indem es uns hier vorerst nur darum zu thun ist, einen neuen Begriff und dessen übliche Bezeichnung festzusetzen.

*) In der Gleichung (2) § 8 ist z. B. $p = x^2 - 4x + 3$; $M = x - 2$; $N = \frac{1}{3}$. Es kann aber auch schon der erste Coefficient p eine constante Grösse sein. Dies ist jedoch nur für die einzige einfache Gleichung $y = ax$ (grade Linie) der Fall. Es ist nämlich $y + \Delta y = a\,(x + \Delta x) = ax + a.\Delta x$, also hier $p = a$.

11.

Subtrahirt man die beiden Gleichungon:

$$y = F(x)$$
$$y + \Delta y = F(x) + p \cdot \Delta x + M \Delta x^2 + \ldots\ldots$$

von einander, d. h. den alten Zustand der Function $F(x)$ von dem neuen $F(x+\Delta x)$, so erhält man die sogen. Differenz (Wachsthum) der Function, nämlich:

$$\Delta y = p \cdot \Delta x + M \cdot \Delta x^2 + N \cdot \Delta x^3 + \ldots\ldots$$

Dividirt man beiderseits durch Δx, so erhält man das Verhältniss der Incremente Δx, Δy, den sogenannten Differenzen-Quotienten, nämlich:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = p + M \Delta x + N \Delta x^2 + \ldots\ldots$$

Lässt man jetzt Δx immerfort abnehmen, so ändert sich auch fortwährend der Differenzen-Quotient $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ und erreicht für $\Delta x = 0$ (indem dann rechter Hand alle Glieder in Δx verschwinden) den bestimmten, von Δx befreiten Grenzwerth p, welcher (im Allgemeinen) eine neue Function von x ist und die trigonometrische Tangente des Winkels τ ausdrückt, welchen die durch den Punct $M(x, y)$ gedachte Berührungslinie mit der Abscissenachse macht, und den wir hinfüro, Kürze halber, Berührungswinkel nennen wollen. Diese neue Function von x, nämlich p, welche offenbar durch die ursprüngliche (primitive) Function $F(x)$, im Voraus bestimmt ist und auf die angegebene Weise daraus abgeleitet worden, nennt man deshalb auch wohl die abgeleitete (derivirte) und bezeichnet sie nach Lagrange's Vorgang, statt mit p, häufig auch mit $F'(x)$ (sprich: fonction prime x, oder deutsch: Function ein x).

12.

Betrachten wir einmal wieder die Differenz der Function $y = F(x)$, nämlich:

$$\Delta y = p \cdot \Delta x + M \Delta x^2 + N \Delta x^3 + \ldots.$$
$$\text{oder: } \Delta y = F'(x) \cdot \Delta x + M \Delta x^2 + N \Delta x^3 + \ldots.$$

so wissen wir, dass, insofern es das Problem der Berührungslinie betrifft, von der ganzen nach Potenzen von Δx fortschrei-

tenden Differenz der Function, $y = F(x)$, das erste und nur das erste Glied $p \cdot \Delta x$ von Wichtigkeit ist und in Betracht kommt, weil hieraus der Coefficient p oder das Grenzverhältniss $\frac{\Delta y}{\Delta x}$, für $\Delta x = 0$, sich von selbst ergiebt.

Da nun aber (wie Newton und Leibnitz voraussahen) nicht bloss für das Problem der Berührungslinien, sondern auch bei vielen andern und viel wichtigeren Problemen, die Kenntniss des ersten Gliedes $p \cdot \Delta x = F'(x) \cdot \Delta x$ in der vollständigen Differenz einer Function von grosser Wichtigkeit ist, indem gerade dieses erste Glied zur Lösung dieser Probleme verhilft, so benennt man zur Abkürzung des Vortrags dieses erste Glied mit einem eigenen Kunstwort, man nennt es nämlich Differential der Function und so wie man die ganze Differenz derselben mit dem Zeichen Δy zu bezeichnen pflegt, so bezeichnet man, nach Leibnitzens Vorgang, das erste Glied dieser Differenz $p \cdot \Delta x$ oder $F'(x) \Delta x$, nämlich das Differential der Function $y = F(x)$ mit dem Zeichen dy, so dass also $dy = p \Delta x$ oder, indem man der Symmetrie halber auch dx statt Δx setzt: *)

$$dy = p \cdot dx$$

In diesem Differential führt nun der, durch die ursprüngliche Function, $y = F(x)$, im Voraus bestimmte Factor von dx, nämlich p oder $F'(x)$ drei verschiedene Namen. Weil er nämlich aus der ursprünglichen Function erst abgeleitet werden muss und, wie wir gesehen haben (im Allgemeinen), wieder eine Function von x ist, so nennt man ihn die derivirte (abgeleitete) Function. Zweitens heisst p oder $F'(x)$ auch der Differentialcoefficient, und drittens, weil aus $dy = p \cdot dx$ folgt, dass $\frac{dy}{dx} = p$, so wird diese Function p oder $F'(x)$ auch Differentialquotient genannt. **)

---

*) So wie dy das Differential von y heisst, so nennt man auch dx das Differential von x.

**) Das Differential der Function $y = F(x)$, nämlich das erste Glied der vollständigen Differenz $\Delta y = p . \Delta x + M \Delta x^2 + \ldots$ ist offenbar nichts anders, als das Product aus dem Incremente dx der absolut veränderlichen Grösse x und der Derivirten p oder $F'(x)$ d. i. die trigonometrische Tangente des Berührungswinkels ι und man sieht, dass die Grösse des Differentials $dy = p . dx = F'(x)\, dx$ für einen bestimmten Werth von x so lange unbestimmt bleibt, als nicht auch die Grösse des Increments dx gegeben

13.

Zu vorhergehendem § wollen wir noch ein Erläuterungs-Beispiel geben. In § 9 haben wir gesehen, dass die krumme Linie, deren Gleichung

$$y = \frac{x^3}{3} - 2x^2 + 3x + 5$$

ist, einen solchen Lauf hat, dass für die beiden Puncte, deren Abscissen $x = 1$ und $x = 3$, die Berührungslinien parallel mit der Abscissenachse laufen, denn von der dort gefundenen Differenz

$$\Delta y = (x^2 - 4x + 3)\,\Delta x + (x - 2)\cdot\Delta x^2 + \tfrac{1}{3}\cdot\Delta x^3$$

ist das erste Glied oder Differential von y:

$$dy = (x^2 - 4x + 3)\cdot dx$$

und also der Differentialquotient, d. i die trigonometrische Tangente des Berührungswinkels τ:

$$\frac{dy}{dx} = x^2 - 4x + 3$$

Wäre nun die Aufgabe gegeben, die Abscissen derjenigen Puncte zu finden, in welchen die Berührungslinien mit der Abscissenachse parallel laufen, so hat man offenbar nur die Werthe

---

ist. Diese Unbestimmtheit kann aber deshalb bleiben, weil wir niemals die absoluten Grössen der Differentiale dx, dy, sondern immer nur deren Verhältniss zu kennen brauchen, nämlich den aus $dy = p \,.\, dx$ folgenden Differentialquotienten $\frac{dy}{dx} = p = F'(x)$, der durch x allein schon bestimmt ist und mit dem erwähnten Grenzwerth des Differenzenquotienten $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ für $\Delta x = 0$, den wir Anfangs mit der unbestimmten Form $\frac{0}{0}$ bezeichnen mussten, übereinstimmt.

Dass man sich mit dem Einem Kunstwort »Derivirte« und der Lagrange'schen Bezeichnung $F'(x)$ nicht begnügt, was freilich möglich gewesen wäre, hat seinen Grund darin, dass durch Einführung des Begriffs Differential und dessen Bezeichnung, sowohl der Vortrag als die Zeichensprache viel bequemer wird. Weil nämlich die Differentiale dx, dy, wenn auch unbestimmt gelassene, Grössen bedeuten, so kann man, was mit dem unbestimmten Grenzzeichen $\frac{0}{0}$ nicht möglich sein würde, die Differentiale von einander trennen und arithmetische Operationen damit vornehmen und z. B. statt $\frac{dy}{dx} = p$ auch $dy = p.dx$, statt $\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 = p^2$ auch $\frac{dy^2}{dx^2} = p^2$ oder $dy^2 = p^2 dx^2$ schreiben etc.

von x zu bestimmen, für welchen das Differential oder der Differentialquotient der Function $y=\frac{x^3}{3}-2x^2+3x+5$, Null wird. Aus:

$$x^2-4x+3=0$$

folgt nun $x=2\pm 1$. Zur Beantwortung dieser Aufgabe war also wiederum nur die Kenntniss des ersten Gliedes der Differenz, d. i. des Differentials der gegebenen Function erforderlich. (Vergl. noch § 88 und 89.)

14.

Nachdem wir nun den Nutzen des Differentials einer Function vorläufig erst durch ein paar der leichtern Beispiele erläutert haben, müssen wir jetzt, um die fernern, mannichfaltigen Anwendungen desselben zeigen zu können, erst die Regeln aufsuchen, nach welchen man von jeder besondern Function das Differential derselben leicht aufstellen kann. Die allgemeine Vorschrift, diese Regeln zu finden, fliesst, wie schon gesagt, aus den Lehren der Analysis: Wir müssen in jeder der fünf verschiedenen Functionen einer veränderlichen Grösse, nämlich in x^n, a^x, lx, $\sin x$, $\cos x$ *) allenthalben $x+\Delta x$ statt x setzen, dann nach den bekannten Regeln der Analysis nach Potenzen von Δx entwickeln, den alten Zustand von dem neuen abziehen und von der erhaltenen Differenz das erste in Δx multiplicirte Glied (das Differential der Function) als Differentialformel dem Gedächtniss einprägen, um darnach in jedem speciellen Fall das Differential gleich aus dem Gedächtniss hinschreiben zu können.

Und hiemit glauben wir nun, was das Auffinden dieser Differentialformeln anbetrifft, dem Anfänger die Sache so nahe gerückt zu haben, dass er sich fast im Stande fühlen muss, die im folgenden Buche gestellten und zuerst zu lössenden Aufgaben selbstständig zu lössen.

Anmerkung 1. Man merke sich ein für allemal, dass, wenn mit einer Function einer veränderlichen Grösse eine constante Grösse, C, bloss als additives oder substractives Glied verbunden ist, dann das Differential der Function von diesem constanten Gliede $\pm C$ ganz unabhängig ist. Mit andern Worten:

*) Aus diesen einfachen Functionen ergeben sich die Differentiale aller übrigen noch so complicirten Functionen.

das Differential einer constanten Grösse ist $= 0$. Dies sieht man schon aus dem § 8 gegebenen Beispiele. Ob dort die Zahl 5 steht oder nicht, das ist für das Differential der Function gleichgültig. Ein solches constantes Glied $\pm C$ kann auf die Gestalt oder Neigungen der Tangenten der entsprechenden krummen Linie keinen Einfluss haben, indem die Hinzufügung oder Weglassung dieses constanten Gliedes $\pm C$, die Abscissenachse bloss tiefer oder höher schiebt. (Vergl. höhere Geometrie § 68.)

Anmerkung 2. Bei der Entwickelung einer Function einer zweitheiligen Grösse, $F(x + \Delta x)$, in eine nach Potenzen von Δx fortschreitenden Reihe brauchen wir uns bei der Ableitung der Differentialformeln, um die Convergenz der Reihen gar nicht zu bekümmern, weil wir ja von der Differenz $\Delta y = p \cdot \Delta x + M \Delta x^2 + \ldots$ immer nur das erste Glied, nämlich das sogenannte Differential $dy = p \cdot dx$ beibehalten.

Erstes Buch.

Ableitung der Differentialformeln.

15.

Aufgabe. Das Differential einer beliebigen Potenz einer veränderlichen Grösse zu finden. Es sei nämlich:

$$y = x^n$$

Auflösung. Verfahren wir nach der § 14 gegebenen allgemeinen Regel, indem wir $x + \Delta x$ statt x setzen, so hat man:

$$y + \Delta y = (x + \Delta x)^n$$

Da der binomische Lehrsatz auch für jeden gebrochenen und negativen Exponenten gültig ist (§ 14, Anmerkung 2), so folgt (Analysis § 70):

$$y + \Delta y = x^n + nx^{n-1} \cdot \Delta x + \frac{n \cdot n - 1}{1 \cdot 2} x^{n-2} \cdot \Delta x^2 + \ldots .$$

Ziehen wir den alten Zustand von dem neuen ab, so erhält man die Differenz der Function, nämlich:

$$\Delta y = nx^{n-1} \cdot \Delta x + \frac{n \cdot (n-1)}{1 \cdot 2} x^{n-2} \cdot \Delta x^2 + \ldots$$

Mithin ist definitionsmässig das verlangte Differential:

$$dy = nx^{n-1} \cdot dx$$

In Worten: das Differential einer Potenz, x^n, ist gleich dem Exponenten, multiplicirt mit der um eine Einheit niedrigeren Potenz und dx.

Wäre: $y = ax^n \pm c$, so ist:

$$y + \Delta y = a(x + \Delta x)^n \pm c$$
$$y + \Delta y = ax^n + nax^{n-1} \cdot \Delta x + M\Delta x^2 + \ldots \pm c$$
$$\Delta y = nax^{n-1} \cdot \Delta x + M\Delta x^2 + \ldots$$
$$dy = nax^{n-1} \cdot dx.$$

16.

Aufgabe. Man differentiire folgende Functionen, d. h. man schreibe nach der eben abgeleiteten Regel, die man im Gedächtniss behalten muss, ihre Differentiale hin.

Es sei:	Man hat:
1. $y = 4x^5 \pm 3 \ldots\ldots$	1. $dy = 20x^4 \cdot dx$
2. $y = \frac{2}{3}x^6 - 1 \ldots\ldots$	2. $dy = 4x^5 \cdot dx$
3. $y = \frac{4}{5}x^{-5}$ *) $\ldots\ldots$	3. $dy = -4x^{-6} \cdot dx$
4. $y = \frac{5}{7x^3} = \frac{5}{7}x^{-3} \ldots$	4. $dy = -\frac{15}{7}x^{-4}dx$
5. $y = \frac{5}{7\sqrt[4]{x^3}} = \frac{5}{7}x^{-\frac{3}{4}} \ldots$	5. $dy = -\frac{15}{28}x^{-\frac{7}{4}}dx$
6. $y = a\sqrt{x} = ax^{\frac{1}{2}} \ldots$	6. $dy = \frac{1}{2}ax^{-\frac{1}{2}}dx$
7. $y = \frac{a}{\sqrt{x}} = ax^{-\frac{1}{2}} \ldots$	7. $dy = -\frac{1}{2}ax^{-\frac{3}{2}}dx$
8. $y = \frac{a}{\sqrt[3]{x}} = ax^{-\frac{1}{3}} \ldots$	8. $dy = -\frac{1}{3}ax^{-\frac{4}{3}} \cdot dx$
9. $y = \frac{a}{b}\sqrt[n]{x^m} = \frac{a}{b}x^{\frac{m}{n}}.$	9. $dy = \frac{ma}{nb}x^{\left\{\frac{m}{n}-1\right\}}dx$
10. $y = \frac{3}{4}\sqrt[3]{x^2} = \frac{3}{4}x^{\frac{2}{3}} \ldots$	10. $dy = \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{3}}dx$

*) Hier zeigt sich die grosse Wichtigkeit der negativen und gebrochenen Exponenten und wie viel von einer glücklich gewählten Zeichensprache abhängt.

17.

Aufgabe. Das Differential der Exponentialfunction e^x zu finden, wo e die Basis der natürlichen Logarithmen ist. Sei nämlich:

$$y = e^x$$

Auflösung. Fs ist hier: $y + \Delta y = e^{x+\Delta x} = e^x \cdot e^{\Delta x}$ und, wenn man $e^{\Delta x}$ in eine Reihe verwandelt (Analysis § 73):

$$y + \Delta y = e^x \left(1 + \Delta x + \frac{\Delta x^2}{1 \cdot 2} + \ldots .\right)$$

$$y + \Delta y = e^x + e^x \cdot \Delta x + \mathrm{M}\Delta x^2 + \ldots .$$

$$\Delta y = e^x \Delta x + \mathrm{M}\Delta x^2 + \ldots .$$

$$dy = e^x \cdot dx$$

In Worten: das Differential der Exponentialgrösse e^x ist wieder dieselbe Grösse, multiplicirt mit dx.

Wäre $y = a \cdot e^x \pm c$, so ist offenbar $dy = ae^x dx$.

Anmerkung. Hätte man eine Exponentialgrösse von anderer Basis, wäre z. B.

$$y = a^x$$

so ist (Analysis § 75):

$$y + \Delta y = a^{x+\Delta x} = a^x \cdot a^{\Delta x} = a^x \left(1 + l\,a \cdot \Delta x + \frac{(la \cdot \Delta x)^2}{1 \cdot 2} + \ldots\right)$$

$$\Delta y = a^x\, l\, a \cdot \Delta x + \mathrm{M}\Delta x^2 + \ldots$$

$$dy = a^x\, l\, a \cdot dx$$

Wäre $y = 3^x$, so ist: $dy = 3^x\, l\, 3 \cdot dx = 3^x \cdot \dfrac{\log 3}{0{,}43429..}\, dx$.

Wäre $y = e^{-x}$, so ist: $dy = -\, e^{-x} dx$.

18.

Aufgabe. Das Differential vom natürlichen Logarithmen einer veränderlichen Grösse zu finden. Es sei nämlich:

$$y = l\,x$$

Auflösung. Man hat hier:

$$y + \Delta y = l\,(x + \Delta x) = l\,x\left(1 + \frac{\Delta x}{x}\right)^{*)} = l\,x + l\left(1 + \frac{\Delta x}{x}\right)$$

und wenn man jetzt $l\left(1 + \dfrac{\Delta x}{x}\right)$ in eine Reihe auflöst (Analysis § 77):

*) Algebra § 277, weil $x + \Delta x = x\left(1 + \dfrac{\Delta x}{x}\right)$.

$$y + \Delta y = lx + \frac{\Delta x}{x} - \frac{\Delta x^2}{2 \cdot x^2} + - \ldots .$$

$$\Delta y = \frac{\Delta x}{x} - \mathrm{M}\Delta x^2 + \ldots ..$$

$$dy = \frac{1}{x} \cdot dx$$

Wäre: $y = a \cdot lx \pm c$, so ist offenbar $dy = \frac{a}{x} \cdot dx$.

Anmerkung. Hätte man vom Briggs'schen Logarithmus einer veränderlichen Grösse, $\log x$, das Differential zu nehmen, so folgt aus:

$$y = \log x$$

indem man den natürlichen Logarithmen mit dem Modulus des Briggs'schen $\mathrm{M} = 0{,}43429 \ldots .$ multiplicirt, dass (Analysis § 78):

$$y = \log x = \mathrm{M}\, l\, x$$

mithin $dy = \mathrm{M} \cdot \frac{dx}{x}$

19.

Aufgabe. Das Differential vom sinus eines veränderlichen Bogens, x, zu finden. Es sei nämlich:

$$y = \sin x$$

Auflösung. Man hat: $y + \Delta y = \sin(x + \Delta x)$

$$y + \Delta y = \sin x \cos \Delta x + \cos x \cdot \sin \Delta x$$

und wenn man statt $\cos \Delta x$ und $\sin \Delta x$ die entsprechenden Reihen setzt (Analysis § 80):

$$y + \Delta y = \sin x \left(1 - \frac{\Delta x^2}{1 \cdot 2} + \ldots \right) + \cos x \left(\Delta x - \frac{\Delta x^3}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \ldots \right)$$

$$y + \Delta y = \sin x + \cos x \cdot \Delta x - \frac{\sin x}{1 \cdot 2} \Delta x^2 - \ldots .$$

$$\Delta y = \cos x \cdot \Delta x - \mathrm{M}\Delta x^2 - \ldots .$$

$$dy = \cos x dx$$

Ist $y = a \cdot \sin x$, so ist $dy = a \cdot \cos x \cdot dx$.

20.

Aufgabe. Das Differential vom cosinus eines veränderlichen Bogens, x, zu finden. Es sei nämlich:

$$y = \cos x$$

Auflösung. Man hat:

$$y + \Delta y = \cos(x + \Delta x)$$
$$y + \Delta y = \cos x \cdot \cos \Delta x - \sin x \cdot \sin \Delta x$$
$$y + \Delta y = \cos x \left(1 - \frac{\Delta x^2}{1 \cdot 2} + \ldots\right) - \sin x \left(\Delta x - \frac{\Delta x^3}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \ldots\right)$$
$$y + \Delta y = \cos x - \sin x \cdot \Delta x - \frac{\cos x}{1 \cdot 2} \Delta x^2 - \ldots$$
$$\Delta y = -\sin x \cdot \Delta x - M \Delta x^2 - \ldots.$$
$$dy = -\sin x \cdot dx$$

Anmerkung. Wenn mit dem Wachsen einer veränderlichen Grösse, x, die daraus gebildete Function, wie z. B. $\cos x$, $\cot x$, e^{-x} etc. abnimmt, so wird natürlich sowohl die Differenz Δy, als auch das Differential derselben dy, immer **negativ**.

21.

Aufgabe. Das Differential einer Function zu finden, welche aus der algebraischen Summe zweier oder mehrerer der bisher betrachteten sogenannten einfachen Functionen (x^n, a^x, lx, $\sin x$, $\cos x$) besteht. Es sei nämlich:

$$y = F(x) + f(x) + \ldots.$$

wo $F(x)$, $f(x)$, ... eine der erwähnten einfachen Functionen bedeutet.

Auflösung. Es ist zuerst:

$$y + \Delta y = F(x + \Delta x) + f(x + \Delta x) + \ldots.$$

und da nun, wie im Vorgehenden gezeigt, jede dieser einfachen Functionen von $x + \Delta x$ sich in eine nach Potenzen von Δx fortschreitende Reihe entwickeln lässt, so ist (§ 10, 3):

$$\begin{aligned} F(x + \Delta x) &= F(x) + p\,\Delta x + M\,\Delta x^2 + \ldots. \\ f(x + \Delta x) &= f(x) + p'\Delta x + M'\Delta x^2 + \ldots. \\ \vdots \quad & \quad\ \vdots \qquad\quad \vdots \end{aligned}$$

Mithin ist:

$$y + \Delta y = F(x) + f(x) + \ldots + (p + p' + \ldots)\,\Delta x + (M + M' + \ldots)\Delta x^2 + \ldots$$
$$\Delta y = (p + p' + \ldots)\,\Delta x + M_1 \Delta x^2 + \ldots$$
$$dy = (p + p' + \ldots)\,dx = p dx + p' dx + \ldots.$$

oder auch nach der andern Schreibart:

$$dy = \mathrm{F}'(x)\, dx + f'(x) \cdot dx + \ldots .$$

In Worten: Man muss das Differential von jedem Gliede besonders nehmen.

Beispiel 1. Sei: $y = ax^n + e^x$, so ist:

$$dy = nax^{n-1}\, dx + e^x dx$$

$$dy = (nax^{n-1} + e^x)\, dx$$

Beispiel 2. Sei: $y = \frac{x^3}{3} - 2x^2 + 3x + 5$, so ist:

$$dy = x^2 dx - 4x dx + 3 dx, \text{ oder:}$$

$$dy = (x^2 - 4x + 3)\, dx$$

$$\frac{dy}{dx} = x^2 - 4x + 3 \text{ *)}$$

Beispiel 3. Es sei: $y = 2\sqrt{x} - \frac{5}{4}\sqrt[3]{x^4} + \frac{3}{\sqrt{x}} + 7$, d. i.

$$y = 2x^{\frac{1}{2}} - \tfrac{5}{4}x^{\frac{4}{3}} + 3x^{-\frac{1}{2}} + 7, \text{ so ist:}$$

$$dy = (x^{-\frac{1}{2}} - \tfrac{5}{3}x^{\frac{1}{3}} - \tfrac{3}{2}x^{-\frac{3}{2}}) \cdot dx$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\sqrt{x}} - \tfrac{5}{3}\sqrt[3]{x} - \frac{3}{2\sqrt{x^3}}$$

Beispiel 4. Sei: $y = a \cdot lx + b \cdot \sin x + c \cdot \cos x$, so ist:

$$dy = a \cdot \frac{dx}{x} + b \cdot \cos x \cdot dx - c \cdot \sin x \cdot dx$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{a}{x} + b \cdot \cos x - c \cdot \sin x$$

22.

Aufgabe. Das Differential einer Function zu finden, welche aus dem Producte zweier der einfachen Functionen x^n, a^x, lx, $\sin x$, $\cos x$, welche wir mit $\mathrm{F}(x)$ und $f(x)$ bezeichnen wollen, besteht. Es sei nämlich:

$$y = \mathrm{F}(x) \cdot f(x)$$

*) In der Folge werden wir manchmal (des kürzern Schreibens halber) statt des Differentials, den Differentialquotienten hinschreiben.

Auflösung. Man hat hier zuerst:

$$y + \Delta y = F(x + \Delta x) \cdot f(x + \Delta x)$$

Jede dieser einfachen Functionen von $x + \Delta x$ lässt sich in eine Reihe von der erforderlichen Form auflösen. Es ist nämlich:

$$y + \Delta y = [F(x) + p\Delta x + M\Delta x^2 + \cdots] \; [f(x) + p'\Delta x + M'\Delta x^2 + \cdots]$$

Führt man die Multiplication aus, indem man die in Eins zusammengefassten, aber hier nicht in Betracht kommenden Coefficienten von Δx^2, $\Delta x^3, \ldots$ mit M'', $N'' \ldots$ bezeichnet, so ist:

$$y + \Delta y = F(x) \cdot f(x) + f(x) \cdot p\Delta x + F(x) \cdot p'\Delta x + M''\Delta x^2 + \ldots$$

$$\Delta y = f(x) \cdot p\Delta x + F(x) \cdot p'\Delta x + M''\Delta x^2 + \ldots .$$

$$dy = f(x) \cdot p dx + F(x) \cdot p' dx$$

oder auch, weil (§ 12) $p = F'(x)$ und $p' = f'(x)$, so geschrieben:

$$dy = f(x) \cdot F'(x) \cdot dx + F(x) \cdot f'(x)\, dx$$

Da nun hier pdx oder $F'(x)dx$ das Differential von $F(x)$ und $p'dx$ oder $f'(x)\,dx$ das Differential von $f(x)$ ist, so lautet die Regel: Das Differential eines Products zweier Functionen, $F(x) \cdot f(x)$, ist gleich der Summe eines jeden Factors, mit dem Differential des andern multiplicirt.

Bezeichnet man die beiden veränderlichen Factoren des Products, Kürze halber, mit P und Q und setzt also:

$$y = PQ$$

so ist: $$dy = Q \cdot d(P) + P \cdot d\,(Q)$$

Durch die Klammern oder einen Punct deutet man an, dass die Differentiale von den Functionen P und Q noch zu nehmen sind. So ist z. B.:

$$d\,(x^n) \text{ oder } d \cdot x^n = nx^{n-1}dx$$

Beispiel 1. Sei: $y = x^n \cdot e^x$, so ist:

$$dy = e^x \cdot nx^{n-1}dx + x^n \cdot e^x dx, \text{ oder:}$$

$$dy = e^x \cdot x^{n-1}(n + x)\, dx$$

$$\frac{dy}{dx} = e^x x^{n-1}(n + x)$$

Beispiel 2. Sei: $y = ae^x\, lx$, so ist:

$$\frac{dy}{a} = lx \cdot e^x dx + e^x \cdot \frac{dx}{x}$$

$$dy = ae^x\left(lx + \frac{1}{x}\right)dx$$

Beispiel 3. Sei: $y = a \sin x \cdot \cos x$, so ist (§§ 19, 20):

$$\frac{dy}{a} = \cos x \cdot \cos x\, dx - \sin x \cdot \sin x dx$$

$$\frac{dy}{dx} = a(\cos^2 x - \sin^2 x) = a \cdot \cos 2x$$

23.

Besteht ein Product aus mehr als zwei veränderlichen Factoren, so kann man es erst in zwei zerlegen; so ist z. B., wenn P, Q, R einfache Functionen von x bedeuten, und wenn:

$$y = \mathrm{PQR} = \mathrm{P} \cdot \mathrm{QR}$$
$$dy = \mathrm{QR} \cdot d(\mathrm{P}) + \mathrm{P} \cdot d(\mathrm{QR})$$

Nun ist aber (§ 22): $d(\mathrm{QR}) = \mathrm{R} \cdot d(\mathrm{Q}) + \mathrm{Q} \cdot d(\mathrm{R})$. Daher:

$$dy = \mathrm{QR} \cdot d(\mathrm{P}) + \mathrm{PR} \cdot d(\mathrm{Q}) + \mathrm{PQ} \cdot d(\mathrm{R})$$

Beispiel. Es sei: $y = x^n e^x\, lx$

$$dy = \left(e^x\, lx \cdot nx^{n-1} + x^n\, lx \cdot e^x + x^n e^x \cdot \frac{1}{x}\right)dx$$

$$\frac{dy}{dx} = x^{n-1} e^x\, (n lx + x lx + 1)$$

24.

Aufgabe. Das Differential von einem Quotienten oder Bruche $\frac{\mathrm{F}(x)}{f(x)}$ zu finden, wenn sowohl Zähler als Nenner eine der einfachen Functionen x^n, a^x, lx, $\sin x$, $\cos x$ ist. Es sei nämlich:

$$y = \frac{\mathrm{F}(x)}{f(x)} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (1)$$

Auflösung. Da sich, wie gezeigt, alle diese einfachen

Functionen von $x+\Delta x$ in Reihen von gesetzmässiger Form auflösen lassen, so ist zunächst: *)

$$y+\Delta y=\frac{F(x+\Delta x)}{f(x+\Delta x)}=\frac{F(x)+p\Delta x+M\Delta x^2+\dots\dots}{f(x)+p'\Delta x+M'\Delta x^2+\dots\dots}\dots(2)$$

und man sieht, dass dieser Quotient wiederum in eine gesetzmässige Reihe entwickelt werden kann, und es ist leicht das hier nur erforderliche erste in Δx multiplicirte Glied zu erhalten. Man hat durch wirkliche Division: **)

$$f(x)+p'\Delta x+\cdot\cdot \,\|\, F(x)+p\Delta x+\cdot\cdot=\frac{F(x)}{f(x)}+\left(\frac{p}{f(x)}-\frac{F(x)p'}{[f(x)]^2}\right)\Delta x+\cdot\cdot$$

$$\frac{F(x)+\frac{F(x)p'}{f(x)}\Delta x+\dots}{\left(p-\frac{F(x)}{f(x)}p'\right)\Delta x+\dots\dots}$$

$$\frac{\left(p-\frac{F(x)}{f(x)}p'\right)\Delta x+\dots\dots}{}$$

*) Will man nicht die Differenz (Δy) der Function, sondern nur das Differential derselben (dy), warum es uns eigentlich nur zu thun ist, so kann man dieses folgendermassen viel kürzer erhalten. Aus obiger Gleichung (1) folgt $y.f(x)=F(x)$, mithin (§ 22):

$$f(x)dy+y.f'(x)dx=F'(x)dx$$
$$dy=\frac{f(x).F'(x)\,dx-F(x).f'(x)dx}{[f(x)]^2}$$

**) Man kann hier das gesuchte Differential auch folgendermassen auf kürzerem Wege finden, indem man erst den Differentialquotienten sucht. Subtrahirt man (1) von (2), so ist:

$$\Delta y=\frac{F(x)+p\,\Delta x+M\,\Delta x^2+\dots\dots}{f(x)+p'\Delta x+M'\Delta x^2+\dots\dots}-\frac{F(x)}{f(x)}$$

oder auf einerlei Nenner gebracht und durch Δx dividirt:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{f(x).p-F(x).p'+(f(x).M-F(x)M')\Delta x+\dots\dots}{[f(x)]^2+f(x)p'\Delta x+\dots\dots}$$

Da nun aus diesem Differenzen-Quotienten der Differential-Quotient hervorgeht, wenn man $\Delta x=0$ setzt, so ist der Differential-Quotient offenbar $=\frac{f(x).p-F(x).p'}{(f(x))^2}$ und mithin das gesuchte Differential: $dy=\frac{f(x).pdx-F(x).p'dx}{(f(x))^2}$

Mithin ist:

$$y + \Delta y = \frac{F(x)}{f(x)} + \left(\frac{p}{f(x)} - \frac{F(x)}{[f(x)]^2} p'\right) \Delta x + M'' \Delta x^2 + \ldots .$$

$$\Delta y = \frac{f(x)p - Fx \cdot p'}{[f(x)]^2} \cdot \Delta x + M'' \Delta x^2 + \ldots .$$

$$dy = \frac{f(x)p - F(x) \cdot p'}{[f(x)]^2} \cdot dx$$

$$dy = \frac{f(x) \cdot p dx - F(x) \cdot p' dx}{[f(x)]^2}$$

Da nun pdx das Differential von $F(x)$ und $p'dx$ das Differential von $f(x)$ ist, so lautet die Regel: Das Differential eines Quotienten ist gleich: dem Nenner, multiplicirt mit dem Differential des Zählers, weniger dem Zähler, multiplicirt mit dem Differential des Nenners, dividirt durch das Quadrat des Nenners.

Bedeuten P und Q einfache Functionen von x und setzt man:

$$y = \frac{P}{Q}$$

so hat man kürzer in Zeichen:

$$dy = \frac{Q \cdot d(P) - P \cdot d(Q)}{Q^2}$$

Beispiel 1. Es sei:

$$y = \frac{e^x}{x^n}\text{*)}, \quad \text{so ist:}$$

$$dy = \frac{x^n \cdot e^x dx - e^x \cdot n x^{n-1} dx}{(x^n)^2}$$

$$dy = \frac{x^{n-1} e^x}{x^{2n}} (x - n) dx$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{e^x (x - n)}{x^{n+1}}$$

---

*) Es ist auch: $y = e^x . x^{-n}$, mithin auch nach § 22:

$$dy = x^{-n} . e^x dx - e^x . n x^{-(n+1)} . dx$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{e^x (x-n)}{x^{n+1}}$$

Beispiel 2. Es sei:

$$y = \frac{x}{lx}, \text{ so ist:}$$

$$dy = \frac{lx \cdot dx - x \cdot \frac{dx}{x}}{(lx)^2}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{lx - 1}{(lx)^2}$$

Beispiel 3. Es sei:

$$y = \frac{a}{x^n} \text{*) so ist}$$

$$dy = \frac{x^n \cdot 0 - anx^{n-1}dx}{x^{2n}} = -nax^{-(n+1)}dx$$

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{an}{x^{n+1}}$$

Beispiel 4. Es sei:

$$y = \frac{a^x}{\cos x}, \text{ so ist:}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\cos x \cdot a^x la + a^x \sin x}{\cos^2 x}$$

25.

Aufgabe. Das Differential von der Tangente eines veränderlichen Bogens, x, zu finden. Es sei nämlich:

$$y = \operatorname{tg} x$$

Auflösung. Man hat: $y = \frac{\sin x}{\cos x}$ und wenn man diesen Quotienten nach § 24 differentiirt, so ist:

$$dy = \frac{\cos x \cdot \cos x dx - \sin x \cdot (-\sin x dx)}{\cos^2 x}$$

$$dy = \frac{(\cos^2 x + \sin^2 x)}{\cos^2 x} \cdot dx$$

$$dy = \frac{dx}{\cos^2 x}$$

*) Es ist auch $y = a . x^{-n}$, mithin $dy = -nax^{-(n+1)}dx$.

26.

Aufgabe. Das Differential von der cotangente eines veränderlichen Bogens x zu finden. Es sei:

$$y = \cot x$$

Auflösung. Es ist auch: $y = \frac{\cos x}{\sin x}$; daher (§ 24):

$$dy = \frac{\sin x \cdot (-\sin x dx) - \cos x \cdot \cos x dx}{\sin^2 x}$$

$$dy = -\frac{dx}{\sin^2 x}$$

27.

Aufgabe. Das Differential vom Bogen eines veränderlichen sinus zu finden. Es sei nämlich:

$$y = \text{arc}\,(\sin = x)$$

Auflösung. Weil x der sinus vom Bogen y ist, so hat man erst, durch Umsetzung: $x = \sin y$ und hieraus:

$$dx = \cos y \cdot dy$$

$$dy = \frac{dx}{\cos y}$$

und, weil $\sin y = x$, also $\cos y = \sqrt{1 - x^2}$ (Trigon. § 100, 1.)

$$dy = \frac{dx}{\sqrt{1 - x^2}}$$

28.

Aufgabe. Das Differential zu finden von:

$$y = \text{arc}\,(\cos = x)$$

Auflösung. Es ist zuerst: $x = \cos y$, mithin:

$$dx = -\sin y \cdot dy$$

$$dy = -\frac{dx}{\sin y}$$

oder weil $\cos y = x$, mithin $\sin y = \sqrt{1 - x^2}$, so ist auch:

$$dy = -\frac{dx}{\sqrt{1 - x^2}}$$

29.

Aufgabe. Man suche das Differential von:

$$y = \text{arc}\,(\text{tg} = x)$$

Auflösung. Man hat hier: $x = \text{tg}\, y$; daher (§ 25):

$$dx = \frac{dy}{\cos^2 y}$$

aus $\text{tg}\, y = x$ folgt $\cos^2 y = \frac{1}{1 + x^2}$ (Trigon. § 100, 6), mithin:

$$dy = \frac{dx}{1 + x^2}$$

30.

Aufgabe. Man suche das Differential von:

$$y = \text{arc}\,(\cot = x)$$

Auflösung. Aus $x = \cot y$ folgt (§ 26) $dx = -\frac{dy}{\sin^2 y}$ und, weil $\cot y = x$ also $\sin^2 y = \frac{1}{1 + x^2}$, so ist:

$$dy = -\frac{dx}{1 + x^2}$$

31.

Sämmtliche im Vorhergehenden gefundenen Differentialformeln sind also, übersichtlich zusammengestellt, folgende:

Wenn:		so ist:
1.	$y = x^n$	$dy = nx^{n-1}dx$
2.	$y = e^x$	$dy = e^x dx$
3.	$y = a^x$	$dy = a^x la \cdot dx$
4.	$y = lx$	$dy = \frac{dx}{x}$
5.	$y = \log x$	$dy = M \cdot \frac{dx}{x}$
6.	$y = F(x) \pm f(x) \pm$.	$dy = F'(x)dx \pm f'(x)dx \pm$..
7.	$y = P \cdot Q$	$dy = Q \cdot dP + P \cdot dQ$
8.	$y = \frac{P}{Q}$	$dy = \frac{Q \cdot dP - P \cdot dQ}{Q^2}$
9.	$y = \sin x$	$dy = \cos x\, dx$
10.	$y = \cos x$	$dy = -\sin x\, dx$
11.	$y = \operatorname{tg} x$	$dy = \frac{dx}{\cos^2 x}$
12.	$y = \cot x$	$dy = -\frac{dx}{\sin^2 x}$
13.	$y = \operatorname{arc} \sin x$	$dy = \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$
14.	$y = \operatorname{arc} \cos x$	$dy = -\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$
15.	$y = \operatorname{arc} \operatorname{tg} x$	$dy = \frac{dx}{1+x^2}$
16.	$y = \operatorname{arc} \cot x$	$dy = -\frac{dx}{1+x^2}$

32.

Mit vorstehenden Fundamentalformeln, die man, wie die wichtigsten Formeln der Trigonometrie, durch fleissige Einübung, wozu im Folgenden Gelegenheit gegeben wird, dem Gedächtniss wohl einprägen muss, sind wir nun im Stande, jede noch so complicirte Function zu differentiiren.

Wir nehmen zuerst eine Function von einer Function. Es sei nämlich allgemein:

$$y = F(u) \text{ und } u = f(x)$$

wo $f(x)$ irgend eine der im vorigen § aufgestellten sechszehn Functionen der absolut veränderlichen Grösse x und $F(u)$ irgend eine dieser Functionen von u bedeutet, so dass also jetzt y nicht

unmittelbar, sondern durch eine Zwischengrösse, u, als Function von x gegeben ist. Es ist mithin u nicht eine absolut, sondern wie y eine abhängig veränderliche Grösse. Denkt man sich für x einen bestimmten Werth gesetzt, so erhält auch u und dadurch, zufolge der ersten Gleichung, auch y einen bestimmten Werth.

Wollte man u eliminiren, um y als unmittelbare Function von x zu erhalten, so würde dies auf die Bezeichnung $y = \mathrm{F}[f(x)]$ führen.*) Um nun die allgemeine Regel zu finden, nach welcher man auch eine Function von einer Function differentiiren kann, lassen wir in den beiden Gleichungen:

$$y = \mathrm{F}(u) \text{ und } u = f(x)$$

die absolut veränderliche Grösse x um das Increment Δx wachsen, alsdann wird auch die unmittelbar von x abhängige Grösse u ein Wachsthum, Δu, und, vermöge der Gleichung $y = \mathrm{F}(u)$ auch die mittelbar davon abhängige Grösse y ein Wachsthum, Δy, erhalten und wir haben dann:

$$y + \Delta y = \mathrm{F}(u + \Delta u) \text{ und } u + \Delta u = f(x + \Delta x)$$

Nun lässt sich, wie bei der Ableitung der § 31 aufgestellten Formeln bewiesen, $f(x + \Delta x)$ in eine nach ganzen, positiven Potenzen von Δx und ebenso $\mathrm{F}(u + \Delta u)$ (indem man einstweilen u als absolut veränderlich betrachtet), in eine nach ganzen, positiven Potenzen von Δu fortschreitenden Reihe entwickeln. Man hat nämlich: **)

$$u + \Delta u = f(x + \Delta x) = f(x) + p\Delta x + \mathrm{M}\Delta x^2 + \ldots.$$
$$\Delta u = p\Delta x + \mathrm{M}\Delta x^2 + \ldots\ldots\ldots.(1)$$
$$y + \Delta y = \mathrm{F}(u + \Delta u) = \mathrm{F}(u) + p'\Delta u + \mathrm{M}'\Delta u^2 + \ldots$$
$$\Delta y = p'\Delta u + \mathrm{M}'\Delta u^2 + \ldots\ldots.(2)$$

---

*) Wäre z. B. $y = e^u$ und $u = \sin x$, so wäre $y = e^{\sin x}$. Hätte man $y = lu$ und $u = x^n + e^x + \sin x + \ldots$ so wäre $y = l(x^n + e^x + \sin x + \ldots)$ etc.

**) Sei z. B. $y = u^3$ und $u = x^2$, so ist:

$$u + \Delta u = (x + \Delta x)^2 = x^2 + 2x\Delta x + \Delta x^2$$
$$\Delta u = 2x\Delta x + \Delta x^2$$
$$y + \Delta y = (u + \Delta u)^3 = u^3 + 3u^2\Delta u + 3u\Delta u^2 + \Delta u^3$$
$$\Delta y = 3u^2 . \Delta u + 3u\Delta u^2 + \Delta u^3$$
$$\Delta y = 3u^2(2x\Delta x + \Delta x^2) + 3u(2x\Delta x + \Delta x^2)^2 + \ldots.$$
$$\Delta y = 6u^2 . x\Delta x + \mathrm{M}'\Delta x^2 + \ldots.$$
$$\Delta y = 6x^5 . \Delta x + \mathrm{M}'\Delta x^2 + \ldots.$$
$$dy = 6x^5 dx$$

Weil nun aber u, also auch Δu von x und Δx abhängig ist, so müssen wir in (2) den Werth von Δu aus (1) substituiren, alsdann ist:

$$\Delta y = p'(p\Delta x + \mathrm{M}\Delta x^2 + \cdots) + \mathrm{M}'(p\Delta x + \mathrm{M}\Delta x^2 + \cdots)^2 + \cdots$$
$$\Delta y = p'p \cdot \Delta x + \mathrm{M}'' \cdot \Delta x^2 + \mathrm{N}'' \cdot \Delta x^3 + \cdots$$

Hier ist also Δy durch eine Reihe ausgedrückt, die, wie es sein muss, nach ganzen, positiven Potenzen von Δx fortschreitet. Die Coefficienten $p', p, \mathrm{M}'' \ldots$ sind Functionen von x und u oder von x allein, weil, vermöge der gesonderten Gleichung $u = f(x)$, u durch x ausgedrückt werden kann. Da nnn das erste Glied $p'p\Delta x$ dieser Reihe, der Erklärung gemäss, das Differential von y in Bezug auf x ist, so haben wir:

$$dy = p' \cdot pdx$$

Betrachten wir nun dieses gefundene Differential genau, so fällt auf, dass der Factor pdx das Differential von der Function $u = f(x)$ ist, nämlich:

$$du = pdx \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (3)$$

und dass der andere Factor, p', der Differentialcoefficient von Function $y = \mathrm{F}(u)$ ist, so nämlich, als wenn u, statt einer von x abhängigen, eine absolut veränderliche Grösse wäre. Denn betrachtet man sie, in formeller Hinsicht, als solche, so folgt aus $y = \mathrm{F}(u)$:

$$dy = p' \cdot du \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (4)$$

Setzt man nun in (4) für du seinen Werth aus (3), so ist, wie vorhin: *)

$$dy = p' \cdot pdx \text{ **)}$$

33.

Aus vorhergehendem § ergiebt sich also der wichtige Satz, dass die in § 31 aufgestellten sechszehn einfachen Differentialformeln ausreichen, um darnach eine jede noch so zusammengesetzte Function einer absolut veränderlichen Grösse, x, oder eine Function

---

*) So folgt z. B. aus $y = u^3$ und $u = x^2$, dass $du = 2xdx$ und $dy = 3u^2 . du$, mithin wieder $dy = 3u^2 . 2xdx = 6x^5 dx$.

**) Oder auch, wenn $y = \mathrm{F}[f(x)]$, in anderer Schreibart:
$$dy = \mathrm{F}'[f(x)] . f'(x)dx.$$

von einer Function, $y = F[f(x)]$, zu differentiiren. Man setze nämlich einstweilen u statt $f(x)$ und differentiire dann nur nach § 31, $y = F(u)$ und $u = f(x)$, und substituire in $dy = F'(u) \cdot du$ für u und du ihre Werthe $f(x)$ und $f'(x)dx$.

34.

Zur Einübung dieser Regel mögen folgende Beispiele dienen. Es sei:

$$1. \quad y = e^{\sin x}$$

Man setze: *) $y = e^u$, also $u = \sin x$

so ist: $dy = e^u \cdot du$ und $du = \cos x dx$

mithin: $dy = e^{\sin x} \cdot \cos x dx$

$$2. \quad y = e^{a\sqrt{x} + b\sqrt[3]{x^2}}$$

Man setze: $y = e^u$, also $u = ax^{\frac{1}{2}} + bx^{\frac{2}{3}}$

$$dy = e^u \cdot du \text{ und } du = (\tfrac{1}{2}ax^{-\frac{1}{2}} + \tfrac{2}{3}bx^{-\frac{1}{3}})\,dx$$

$$dy = e^{a\sqrt{x} + b\sqrt[3]{x^2}}\left(\frac{a}{2\sqrt{x}} + \frac{2b}{3\sqrt[3]{x}}\right)dx$$

$$3. \quad y = \sqrt[3]{(1 + 2x - 3x^2)^5}$$

Setze: $y = u^{\frac{5}{3}}$, mithin: $u = 1 + 2x - 3x^2$

$$dy = \tfrac{5}{3}u^{\frac{2}{3}} \cdot du \text{ und } du = (2 - 6x)\,dx$$

$$dy = \tfrac{5}{3}(1 + 2x - 3x^2)^{\frac{2}{3}}(2 - 6x)\,dx$$

$$4. \quad y = l(ax^n + b\cos x)$$

$$y = lu, \text{ also } u = ax^n + b\cos x$$

$$dy = \frac{du}{u} \text{ und } du = (anx^{n-1} - b\sin x)\,dx$$

$$dy = \frac{anx^{n-1} - b\sin x}{ax^n + b\cos x} \cdot dx$$

---

*) Bei einiger Aufmerksamkeit wird man solche Substitutionen selten zu Hülfe rufen und z. B. aus $y = e^{\sin x}$ direct ableiten, dass $dy = e^{\sin x}.\cos x dx$ ist. Auch für alle folgende Beispiele ist eine Substitution unnöthig.

5. $y = \sin^m x$

$$y = u^m;\quad u = \sin x$$
$$dy = mu^{m-1}\cdot du;\quad du = \cos x dx$$
$$dy = m \sin^{m-1} x\cdot \cos x dx$$

6. $y = \text{arc} \sin \sqrt{1-2x}$

$$y = \text{arc} \sin u;\quad u = (1-2x)^{\frac{1}{2}}$$
$$dy = \frac{du}{\sqrt{1-u^2}};\quad du = -\tfrac{1}{2}(1-2x)^{-\frac{1}{2}}\cdot 2dx\text{ *)}$$
$$dy = -\frac{(1-2x)^{-\frac{1}{2}}\cdot dx}{\sqrt{2x}} = -\frac{dx}{\sqrt{2x}\cdot\sqrt{1-2x}}$$

7. $y = r \text{ arc} \cos \frac{r-x}{r}$

$$y = r \text{ arc} \cos u;\quad u = \frac{r-x}{r}$$
$$dy = -\frac{rdu}{\sqrt{1-u^2}};\quad du = -\frac{dx}{r}$$
$$dy = \frac{rdx}{\sqrt{2rx - x^2}}$$

8. $y = \cos^n ax$

$$y = u^n;\quad u = \cos ax$$
$$dy = nu^{n-1}du;\quad du = -\sin ax . adx$$
$$dy = -an \cos^{n-1} ax \sin axdx$$

9. $y = l\cdot \cos^n ax$

$$y = lu;\quad u = \cos^n ax \text{ **)}$$
$$dy = \frac{du}{u};\quad du = -an \cos^{n-1} ax\cdot \sin ax\cdot dx$$
$$dy = -an \operatorname{tg} ax\cdot dx$$

---

*) Man hätte hier wieder $u = z^{\frac{1}{2}}$, also $z = 1 - 2x$ setzen können, woraus dann $du = \frac{1}{2}z^{-\frac{1}{2}}dz$ und $dz = -2dx$, mithin: $du = -\frac{1}{2}(1-2x)^{-\frac{1}{2}}.2dx$.

**) Oder so: $y = lu;\quad u = v^n;\quad v = \cos ax$

$$dy = \frac{du}{u};\quad du = nv^{n-1}dv;\quad dv = -\sin ax . adx$$
$$du = n \cos^{n-1} ax . (-\sin ax)\, adx$$
$$dy = -an \operatorname{tg} axdx$$

10. $y = l \operatorname{arc\,tg} mx$

$$y = lu; \quad u = \operatorname{arc\,tg} mx$$

$$dy = \frac{du}{u}; \quad du = \frac{mdx}{1 + m^2x^2}$$

$$dy = \frac{mdx}{(1 + m^2x^2) \operatorname{arc\,tg} mx}$$

11. $y = \sqrt{1+x} \cdot \sqrt[3]{1-x^2}$ (§ 22)

$$dy = (1-x^2)^{\frac{1}{3}} \cdot d(1+x)^{\frac{1}{2}} + (1+x)^{\frac{1}{2}} \cdot d(1-x^2)^{\frac{1}{3}}$$

$$\frac{dy}{dx} = (1-x^2)^{\frac{1}{3}} \cdot \tfrac{1}{2}(1+x)^{-\frac{1}{2}} + (1+x)^{\frac{1}{2}} \cdot \tfrac{1}{3}(1-x^2)^{-\frac{2}{3}}(-2x)$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{(1-x^2)^{\frac{1}{3}}}{2(1+x)^{\frac{1}{2}}} - \frac{2x(1+x)^{\frac{1}{2}}}{3(1-x^2)^{\frac{2}{3}}}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{3 - 4x - 7x^2}{6(1+x)^{\frac{1}{2}} \cdot (1-x^2)^{\frac{2}{3}}}$$

12. $y = \dfrac{\sqrt[3]{1+x^2}}{\sqrt{1+x}}$ (§ 24)

$$dy = \frac{(1+x)^{\frac{1}{2}} \cdot d(1+x^2)^{\frac{1}{3}} - (1+x^2)^{\frac{1}{3}} \cdot d(1+x)^{\frac{1}{2}}}{1+x}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{(1+x)^{\frac{1}{2}} \cdot \frac{1}{3}(1+x^2)^{-\frac{2}{3}} \cdot 2x - (1+x^2)^{\frac{1}{3}} \cdot \frac{1}{2}(1+x)^{-\frac{1}{2}}}{1+x}$$

$$dy = \frac{(x^2 + 4x - 3) \cdot dx}{6(1+x)^{\frac{3}{2}} \cdot (1+x^2)^{\frac{2}{3}}}$$

35a.

*) Man kann in solchen und ähnlichen Fällen, wie in den Beispielen 10, 11 und 12, sich das Differentiiren manchmal erleichtern, indem man erst die Logarithmen nimmt, oder umgekehrt, auf die Zahlen übergeht. Beispiele:

1. $y = \dfrac{(1+x^2)^{\frac{1}{3}}}{(1+x)^{\frac{1}{2}}}$

$$ly = \tfrac{1}{3}l(1+x^2) - \tfrac{1}{2}l(1+x)$$

$$\frac{dy}{y} = \frac{\frac{1}{3} \cdot 2xdx}{1+x^2} - \frac{\frac{1}{2} \cdot dx}{1+x}$$

$$\frac{dy}{ydx} = \frac{x^2 + 4x - 3}{6(1+x)(1+x^2)}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x^2 + 4x - 3}{6(1+x)^{\frac{3}{2}}(1+x^2)^{\frac{2}{3}}}$$

2. $y = l \operatorname{arc\,tg} mx$

$$e^y = \operatorname{arc\,tg} mx$$

$$e^y dy = \frac{mdx}{1+m^2x^2}$$

$$dy = \frac{mdx}{(1+m^2x^2)\cdot \operatorname{arc\,tg} mx}$$

3. $y = x^x$

$$ly = x \cdot lx$$

$$\frac{dy}{y} = lx \cdot dx + x \cdot \frac{dx}{x}$$

$$dy = x^x \cdot (lx + 1)\,dx$$

Um mechanische Gewandtheit und Sicherheit im Differentiiren zu erlangen, möge man noch die im folgenden Paragraphen stehenden Beispiele machen und sich dabei erinnern, dass zwei Functionen, welche nur um ein constantes Glied verschieden sind, nothwendig einerlei Differential haben, so folgt z. B. aus:

1. $y = \frac{1}{1-x}$ und $y = \frac{x}{1-x}$

$$dy = \frac{dx}{(1-x)^2}; \quad dy = \frac{dx}{(1-x)^2}$$

2. $y = l\cos x$; $\quad y = l\cos x + \sin^2 x + \cos^2 x$

$$dy = -\operatorname{tg} x \cdot dx; \quad dy = -\operatorname{tg} x \cdot dx$$

weil $\frac{1}{1-x} = 1 + \frac{x}{1-x}$, und $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$.

35 b.

Aufgabe. Man setze $y =$ jeder der folgenden Functionen von x und bestimme dann die Differentialquotienten $\frac{dy}{dx}$.

1. $2ax^2\sqrt{x}$.

2. $\frac{1}{x}+1$

3. $\frac{3}{2}\sqrt[3]{x^2} - \frac{1}{\sqrt{x}}$

4. $(a+x)^n$

5. $(a^2-x^2)^2$

6. $a+b\sqrt{x}-\frac{c}{x}$

7. $\frac{1}{a^2+x^2}$

8. $\sqrt[3]{a^3+x^3}$

9. $\frac{a}{\cos x}$

10. $\sqrt[3]{a^4-x^4}$

11. $\frac{a}{\sqrt{1-x^2}}$

12. $\frac{x}{\sqrt{a^4+x^4}}$

13. $\frac{\sqrt{a^2-x^2}}{x}$

14. $\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}$

15. $l(a+x)$

16. $l(x+\sqrt{a^2+x^2})$

17. $l(x^n)$

18. $(lx)^n$

19. $l\frac{x}{\sqrt{a^2+x^2}}$

20. e^{lx}

21. llx

22. e^{e^x}

23. $\frac{a}{\sin^2 x}$

24. $l \sin x$

25. $lx \cdot l\cos x$

26. $a \cdot \cos^4 x$

27. $\sin(a+bx)$

28. $\sin^4 x - \cos^4 x$

29. $\mathrm{tg}^2 x + \cot^2 x$

30. $\sin^2 x + \cos^2 x$

31. $e^x \cdot \sin mx$

32. $\mathrm{tg}\, 2x$

33. $\mathrm{tg}^2 mx$

34. $\mathrm{arc}\sin\sqrt{\frac{1-x}{2}}$

35. $\mathrm{arc}\cos\frac{x}{a}$

36. $\mathrm{arc}\;\mathrm{tg}\frac{x}{\sqrt{a^2-x^2}}$

37. $\mathrm{arc}\cot\frac{a}{1+x}$

38. $\sqrt{\frac{1-\cos x}{2}}$

39. $l\frac{x+\sqrt{x^2-a^2}}{x-\sqrt{x^2-a^2}}$

40. $e^{\mathrm{arc}\sin x}$

Auflösung. Man hat für die geforderten Differential-Quotienten der Reihe nach:

1. $5a\sqrt{x^3}$

2. $-\dfrac{1}{x^2}$

3. $\dfrac{1}{\sqrt[3]{x}}+\dfrac{1}{2\sqrt{x^3}}$

4. $n(a+x)^{n-1}$

5. $-4x(a^2-x^2)$

6. $\dfrac{b}{2\sqrt{x}}+\dfrac{c}{x^2}$

7. $-\dfrac{2x}{(a^2+x^2)^2}$

8. $\dfrac{x^2}{\sqrt[3]{(a^3+x^3)^2}}$

9. $\dfrac{a\sin x}{\cos^2 x}$

10. $-\dfrac{4x^3}{3\sqrt[3]{(a^4-x^4)^2}}$

11. $\dfrac{ax}{\sqrt{(1-x^2)^3}}$

12. $\dfrac{a^4-x^4}{\sqrt{(a^4+x^4)^3}}$

13. $=-\dfrac{a^2}{x^2\sqrt{a^2-x^2}}$

14. $-\dfrac{1}{\sqrt{(1-x)}\sqrt{(1+x)^3}}$

15. $\dfrac{1}{a+x}$

16. $\dfrac{1}{\sqrt{a^2+x^2}}$

17. $\dfrac{n}{x}$

18. $\dfrac{n(lx)^{n-1}}{x}$

19. $\dfrac{a^2}{x(a^2+x^2)}$

20. $\dfrac{e^{lx}}{x}$

21. $\dfrac{1}{x\,lx}$

22. $e^{e^x}\cdot e^x$

23. $-\dfrac{2a\cos x}{\sin^3 x}$

24. $\cot x$

25. $\dfrac{l\cos x}{x}-\operatorname{tg} x\,lx$

26. $-4a\cos^3 x\sin x$

27. $b\cdot\cos(a+bx)$

28. $2\sin 2x$

29. $2\left(\dfrac{\operatorname{tg} x}{\cos^2 x}-\dfrac{\cot x}{\sin^2 x}\right)$

30. 0

31. $e^x(\sin mx+m\cos mx)$

32. $\dfrac{2}{\cos^2 2x}$

33. $\dfrac{2m.\operatorname{tg} mx}{\cos^2 mx}$

34. $-\dfrac{1}{2\sqrt{1-x^2}}$

35. $-\dfrac{1}{\sqrt{a^2-x^2}}$

36. $-\dfrac{1}{\sqrt{a^2-x^2}}$

37. $\dfrac{a}{a^2+(1+x)^2}$

38. $\dfrac{\sin x}{\sqrt{8}.\sqrt{1-\cos x}}$

39. $\dfrac{2}{\sqrt{x^2-a^2}}$

40. $\dfrac{e^{\arcsin x}}{\sqrt{1-x^2}}$

Zweites Buch.

Von den successiven oder höhern Differentialen. Der Maclaurin'sche und Taylor'sche Lehrsatz.

36.

Wenn eine und dieselbe Function einer veränderlichen Grösse, $F(x)$, durch zwei verschiedene Formen ausgedrückt ist, und welche beide Formen also für denselben Werth von x dasselbe Resultat geben, oder doch, im Fall die eine Form eine unendliche, nach ganzen, positiven Potenzen von x fortschreitende Reihe ist, für jeden Werth von x, für welche diese Reihe convergirt, dasselbe Resultat geben, so müssen natürlich auch die Differentiale und also auch die Differential-Quotienten beider nur in der Form verschiedenen Functionen einander gleich sein. Ist z. B. $F(x)=(a+x)^3$, so ist auch in anderer Form ausgedrückt: $F(x)=a^3+3a^2x+3ax^2+x^3$, mithin:

$$F(x)=(a+x)^3=a^3+3a^2x+3ax^2+x^3$$

Differentiirt man beide Formen, so ist nothwendig:

$$F'(x)\,dx=3\,(a+x)^2dx=(3a^2+6ax+3x^2)\,dx$$

und, indem man beiderseits durch dx dividirt:

$$F'(x)=3\,(a+x)^2=3a^2+6ax+3x^2$$

Da nun der erhaltene Differential-Quotient $F'(x)$ wieder eine Function von x ist, so kann man diese neue Function $F'(x)$ wiederum wie gewöhnlich differentiiren und erhält dann, nach jedesmaliger Division mit dx, den 2ten, 3ten Differential-Quotienten der ursprünglichen Function $F(x)$, wofür Lagrange die Bezeichnung $F''(x)$, $F'''(x)$... eingeführt hat (sprich: Fonction seconde, tierce etc.; deutsch: Function zwei, drei etc.). Für obiges Beispiel ist nämlich:

$$F''(x) = 6(a+x) = 6a + 6x$$

$$F'''(x) = 6$$

$$F^{IV}(x) = 0.$$

37.

Die successive auf einander folgenden sogenannten höheren Differential-Quotienten $F'(x)$, $F''(x)$.... werden auch wohl die 1ste, 2te,.. Abgeleitete (Derivirte) genannt. Wird einer von ihnen eine constante Grösse, so werden natürlich alle folgenden $= 0$. Sei als zweites Beispiel:

$$F(x) = e^x = 1 + x + \frac{x^2}{1 \cdot 2} + \frac{x^3}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \dots.$$

so ist: $$F'(x) = e^x = 1 + x + \frac{x^2}{1 \cdot 2} + \dots.$$

$$F''(x) = e^x = 1 + x + \frac{x^2}{1 \cdot 2} + \dots.$$

Hier nimmt das Differentiiren kein Ende. Sei noch:

$$F(x) = \frac{1 - x^3}{1 - x} = 1 + x + x^2, \text{ so ist (§ 31, 8):}$$

$$F'(x) = \frac{1 - 3x^2 + 2x^3}{(1-x)^2} = 1 + 2x$$

$$F''(x) = \frac{2 - 6x + 6x^2 - 2x^3}{(1-x)^3} = 2$$

$$F'''(x) = 0$$

Sei ferner noch:

$$F(x) = \text{arc tg}\, x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + - \text{(Analys. § 87.)}$$

$$F'(x) = \frac{1}{1+x^2} = 1 - x^2 + x^4 - x^6 + -$$

$$F''(x) = \frac{-2x}{(1+x^2)^2} = -2x + 4x^3 - 6x^5 + -$$

$$\frac{1}{(1+x^2)^2} = 1 - 2x^2 + 3x^4 - 4x^6 + \ldots.$$

Es muss also für jedes x, für welches die so abgeleiteten neuen Reihen (welche offenbar wieder die Grundform der Analysis haben) convergent sind, der linker Hand stehende geschlossene Ausdruck ihre Summe sein, und man könnte also, was auch schon Moivre und Euler gethan, das successive Differentiiren dazu benutzen, um unzählige summirbare Reihen sammt ihren Summen zu finden. Wir haben jedoch diese leichte Anwendung der Differential-Rechnung hier nur beiläufig erwähnen wollen.

38.

Ehe wir aber zu andern nützlichern Anwendungen übergehen können, müssen wir uns zuvor noch ein paar andere übliche Bezeichnungen der höhern Differential-Ouotienten merken.

Nehmen wir als specielles Beispiel an, es sei:

$$y = x^5, \text{ so ist}$$

$$\frac{dy}{dx} = 5x^4.$$

Da nun hier der Differential-Quotient $\frac{dy}{dx}$ wieder eine Function von x ist, so können wir sie (ihn) wiederum wie gewöhnlich differentiiren und erhalten für den zweiten Differential-Quotienten:

$$d\left(\frac{dy}{dx}\right) = 20x^3 \cdot dx$$

$$\frac{d\left(\frac{dy}{dx}\right)}{dx} = 20x^3$$

Diese Bezeichnung ist aber sehr unbequem und würde es für die folgenden Differentiale und Differential-Quotienten noch mehr werden. Sie ist deshalb nicht üblich. Man bezeichnet diesen zweiten Differential-Quotienten kürzer mit $\frac{d^2y}{dx^2}$ *), so dass also für obiges Beispiel:

$$\frac{d^2y}{dx^2} = 20x^3$$

und wo also die an dem Differential-Zeichen d stehende Zahl 2 nichts anderes bedeutet, als dass die Function $y = x^5$ zweimal nach einander differentiirt worden. **)

Für den 3ten, 4ten.... Differential-Quotienten hat man, in ähnlicher Bezeichnung:

---

*) Die älteste noch vorkommende Bezeichnung ist: $\frac{ddy}{dx^2}$

**) Man kann sich diese Sache auch noch so zurecht legen: Das erste Differential von $y = x^5$ ist: $dy = 5x^4\Delta x$. Lässt man hierin die absolut veränderliche Grösse x wieder um dasselbe constante Increment wachsen und setzt $x + \Delta x$ statt x, so wird auch dy ein Increment erhalten, welches man einstweilen mit Δdy bezeichnen mag, und wir haben dann:

$$dy + \Delta dy = 5(x + \Delta x)^4 . \Delta x = 5x^4\Delta x + 20x^3\Delta x^2 + M\Delta x^3 + \ldots.$$

jetzt den alten Zustand von diesem neuen subtrahirt:

$$\Delta dy = 20x^3 . \Delta x^2 + M\Delta x^3 + \ldots.$$

und indem wir von dieser Differenz nur das erste Glied behalten und mit ddy oder $d''y$ oder kürzer mit d^2y bezeichnen, so hat man für das zweite Differential von $y = x^5$:

$$d^2y = 20x^3 . \Delta x^2 \quad \text{oder:}$$

$$d^2y = 20x^3 . dx^2$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = 20x^3,$$

indem wir der Symmetrie halber dx^2 statt Δx^2 schreiben. Dasselbe hat man offenbar kürzer, indem man das erste Differential $dy = 5x^4 . dx$ nochmals differentiirt und dabei den Factor dx als constant betrachtet, nämlich: $d^2y = 20x^3 . dx^2$. Ferner $d^3y = 60x^2 . dx^3$ etc.

Es ist klar, dass durch eine gegebene Function, $y = F(x)$, nicht allein das erste, sondern auch alle höheren Differentiale (Differential-Quotienten), vollkommen bestimmt sind.

$$\frac{d^3y}{dx^3} = 60x^2$$

$$\frac{d^4y}{dx^4} = 120x$$

Auch werden noch die auf einander folgenden Differential-Quotienten, Kürze halber, manchmal mit dem Buchstaben p, q, r.... bezeichnet, so dass also, wenn allgemein:

$$y = \mathrm{F}(x)$$

ist, in allen drei verschiedenen Bezeichnungen:

$$\frac{dy}{dx} = \mathrm{F}'(x) = p$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \mathrm{F}''(x) = q$$

$$\vdots$$

39.

Maclaurin'scher Lehrsatz.

Die im Vorhergehenden gezeigte successive Differentiation brachte Maclaurin auf den nahe liegenden Gedanken, dadurch jede Function, $\mathrm{F}(x)$, welche dazu geeignet ist, in eine gesetzmässige Reihe zu verwandeln. Um diese leichte Anwendung der Differentialrechnung zuerst an einem besondern Beispiel zu zeigen, möge $\mathrm{F}(x) = \sin(a + bx)$ die Function sein, welche in eine nach ganzen, positiven Potenzen des veränderlichen Bogens x fortschreitende Reihe verwandelt werden soll. Wenn die geforderte Reihe existirt, so kann man sie, sagte Maclaurin, von der fruchtbaren Methode der unbestimmten Coefficienten profitirend, erst fingiren. Man setze also:

(1) $\mathrm{F}(x) = \sin(a + bx) = \mathrm{A} + \mathrm{B}x + \mathrm{C}x^2 + \mathrm{D}x^3 + \mathrm{E}x^4 + \ldots.$

Sucht man jetzt, um A, B, C.... zu bestimmen, die auf einander folgenden Differential-Quotienten, so hat man nach und nach:

(2) $\mathrm{F}'(x) = b \cdot \cos(a + bx) = \mathrm{B} + 2\mathrm{C}x + 3\mathrm{D}x^2 + 4\mathrm{E}x^3 + \ldots.$

(3) $\mathrm{F}''(x) = -b^2 \sin(a + bx) = 2\mathrm{C} + 2 \cdot 3\mathrm{D}x + 3 \cdot 4\mathrm{E}x^2 + \ldots.$

(4) $\mathrm{F}'''(x) = -b^3 \cos(a + bx) = 2 \cdot 3\mathrm{D} + 2 \cdot 3 \cdot 4\mathrm{E}x + \ldots.$

(5) $\mathrm{F}^{\mathrm{IV}}(x) = b^4 \sin(a + bx) = 2 \cdot 3 \cdot 4\mathrm{E} + \ldots.$

$$\vdots \qquad \vdots$$

Setzen wir nun in sämmtlichen Gleichungen (1), (2)...., $x=0$, so müssen beiderseits gleiche Resultate kommen. Die erste Gleichung bestimmt dann den Coefficienten A, die zweite den Coefficienten B etc. Es ist nämlich für $x=0$ in üblicher Bezeichnung *):

(1) $F(0) \quad = \sin a = A$

(2) $F'(0) \quad = b \cdot \cos a = B$

(3) $F''(0) \quad = -b^2 \sin a = 2C$, woraus: $C = -\frac{b^2 \sin a}{1 \cdot 2} = \frac{F''(0)}{1 \cdot 2}$

(4) $F'''(0) = -b^3 \cos a = 2 \cdot 3D$, „ $D = -\frac{b^3 \cos a}{1 \cdot 2 \cdot 3} = \frac{F'''(0)}{1 \cdot 2 \cdot 3}$

(5) $F^{IV}(0) = b^4 \sin a = 2 \cdot 3 \cdot 4E$, „ $E = \frac{b^4 \sin a}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} = \frac{F^{IV}(0)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4}$

$\vdots$

Es ist mithin:

$$\sin(a+bx) = \sin a + b \cos a \cdot x - \frac{b^2 \sin a}{1 \cdot 2} \cdot x^2 - \frac{b^3 \cos a}{1 \cdot 2 \cdot 3} \cdot x^3 + \ldots$$

Das Gesetz dieser Reihe tritt klar hervor.

40.

Lässt sich also eine Function einer veränderlichen Grösse, $F(x)$, in eine nach Potenzen von x fortschreitende Reihe verwandeln, so muss man in $F(x)$ und allen Derivirten $F'(x)$, $F''(x)$...., $x=0$ setzen, und hat dann allgemein:

$$F(x) = F(0) + F'(0) \cdot x + \frac{F''(0)}{1 \cdot 2} \cdot x^2 + \frac{F'''(0)}{1 \cdot 2 \cdot 3} \cdot x^3 + \ldots.$$

und dies ist nun, in üblicher Bezeichnung, der erwähnte Maclaurin'sche Lehrsatz. **)

---

*) Wäre z. B. $F(x) = x^2 - 3x + 1$, so bedeuteten $F(0)$, $F(1)$, $F(2)$..... die Werthe, welche diese Function $x^2 - 3x + 1$ für $x = 0, 1, 2, \ldots$ hat, so dass also hier $F(0) = 1$; $F(1) = -1$; $F(2) = -1$; $F(3) = 1$; $F(4) = 5$ etc.

**) Nach einer Bemerkung von Moigno, hat weder Maclaurin noch Stirling, sondern Taylor zuerst diese Formel aufgestellt. Sie wird jedoch immer nach Maclaurin benannt, der sie Pag. 610 seiner »treatise of fluxions« mittheilt.

41.

Aufgabe. Die Function arc($\sin = x$) in eine Reihe zu verwandeln, die nach Potenzen vom sinus des Bogens fortschreitet.

Auflösung. Es sei, wenn eine solche Reihe existirt:

$$\arcsin x = a + bx + cx^2 + dx^3 + ex^4 + fx^5 + \cdots (1)$$

so ist § 27: $$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = b + 2cx + 3dx^2 + 4ex^3 + 5fx^4 + \cdots (2)$$

Die fernern Differential-Quotienten werden hier sehr complicirt. Man thut jetzt besser, die Hülfe der Analysis zu benutzen und $\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = (1-x^2)^{-\frac{1}{2}}$ nach dem binomischen Lehrsatz zu entwickeln. Thut man dies, so ist (Analysis § 71):

$$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = 1 + \tfrac{1}{2}x^2 + \frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}x^4 + \frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6}x^6 + \cdots (3)$$

Setzt man jetzt $x = 0$, so giebt die erste Gleichung $\arcsin 0 = a = 0$. Da ferner die beiden Reihen (2) und (3) für jeden Werth von x einander gleich sein müssen, so hat man:

$$b = 1;\ 2c = 0;\ 3d = \tfrac{1}{2};\ 4e = 0;\ 5f = \frac{1\cdot 3}{2\cdot 4} \text{ etc., mithin ist:}$$

$$\arcsin x = x + \tfrac{1}{2}\cdot\frac{x^3}{3} + \frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}\cdot\frac{x^5}{5} + \frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6}\cdot\frac{x^7}{7} + \ldots$$

Diese Reihe ist convergent von $x = 0$ bis $x = \pm 1$. Setzt man $\arcsin x = u$, mithin $x = \sin u$, so ist in üblicher Schreibart:

$$u = \sin u + \tfrac{1}{2}\cdot\frac{\sin^3 u}{3} + \frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}\cdot\frac{\sin^5 u}{5} + \ldots$$

Nimmt man z. B. $\sin u = \frac{1}{2}$, so ist $u = \frac{\pi}{6}$ mithin:

$$\frac{\pi}{6} = \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{2}\cdot\frac{1}{3\cdot 2^3} + \frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}\cdot\frac{1}{5\cdot 2^5} + \ldots$$

Auf verschiedene Ausdrücke für die Zahl π kommt man in der höhern Mathematik sehr häufig.

42.

Prämisse. Hat man irgend eine Function von einer zweitheiligen Grösse, $F(\alpha+\beta)$, sie möge in eine Reihe entwickelt sein oder nicht, so ist es, was den Differential-Quotienten dieser Function anlangt, ganz einerlei, ob man den ersten Theil α oder den zweiten Theil β als veränderliche Grösse betrachtet.*)

Um die Richtigkeit dieses an sich klaren Satzes noch an ein paar speciellen Beispielen zu zeigen, sei:

$$y = (\alpha+\beta)^4 = \alpha^4 + 4\alpha^3\beta + 6\alpha^2\beta^2 + 4\alpha\beta^3 + \beta^4 \cdots\cdots (1)$$

Betrachtet man nun α als veränderlich und β als constant, so ist:

$$dy = 4(\alpha+\beta)^3 \cdot d\alpha = (4\alpha^3 + 12\alpha^2\beta + 12\alpha\beta^2 + 4\beta^3)d\alpha$$

$$\left(\frac{dy}{d\alpha}\right)^{**)} = 4(\alpha+\beta)^3 = 4(\alpha^3 + 3\alpha^2\beta + 3\alpha\beta^2 + \beta^3)$$

Betrachten wir dagegen α als constant und β als veränderlich, so folgt aus der Gleichung (1):

$$dy = 4\,(\alpha+\beta)^3\, d\beta = (4\alpha^3 + 12\alpha^2\beta + 12\alpha\beta^2 + 4\beta^3)\cdot d\beta$$

$$\left(\frac{dy}{d\beta}\right) = 4\,(\alpha+\beta)^3 = 4\,(\alpha^3 + 3\alpha^2\beta + 3\alpha\beta^2 + \beta^3)$$

also in beiden Fällen die Differential-Quotienten einander gleich. Wäre (Analysis § 80)

$$(2),\; y = \sin(\alpha+\beta) = (\alpha+\beta) - \frac{(\alpha+\beta)^3}{1\cdot 2\cdot 3} + - \ldots.$$

so ist, einmal in Bezug auf α und einmal in Bezug auf β differentiirt,

$$\left(\frac{dy}{d\alpha}\right) = \cos(\alpha+\beta) = 1 - \frac{(\alpha+\beta)^2}{1\cdot 2} + - \ldots.$$

$$\left(\frac{dy}{d\beta}\right) = \cos(\alpha+\beta) = 1 - \frac{(\alpha+\beta)^2}{1\cdot 2} + - \ldots.$$

---

*) Es versteht sich, dass in $F(\alpha+\beta)$ die Grössen α und β nur in der 1sten Potenz und mit gleichen Coefficienten vorkommen. Also nicht etwa:

$$(\alpha^2+\beta^2)^4 \text{ etc.}$$

**) Durch die Klammer wird, nach Euler, angedeutet, dass die Function, nämlich y, in Bezug auf α differentiirt worden.

$$3.\quad y = e^{x+\alpha} = e^x \cdot e^\alpha = e^x\left(1 + \alpha + \frac{\alpha^2}{1\cdot 2} + \ldots\right)$$

$$y = e^x + e^x\alpha + e^x \cdot \frac{\alpha^2}{1\cdot 2} + \ldots$$

$$\left(\frac{dy}{dx}\right) = e^x\left(1 + \alpha + \frac{\alpha^2}{1\cdot 2} + \ldots\right)$$

$$\left(\frac{dy}{d\alpha}\right) = e^x\left(1 + \alpha + \frac{\alpha^2}{1\cdot 2} + \ldots\right)$$

Ist ganz allgemein: $y = F(\alpha + \beta)$, so ist nothwendig:

$$\left(\frac{dy}{d\alpha}\right) = \left(\frac{dy}{d\beta}\right) = F'(\alpha + \beta)$$

43.

Taylor's Lehrsatz.

Ist allgemein $F(x)$ irgend eine Function von x, so ist im Vorhergehenden gezeigt (indem wir alle Arten Functionen einzeln durchgenommen haben), dass, wenn man der veränderlichen Grösse x ein Wachsthum, α, beilegt, wir dann die Function der zweitheiligen Grösse, nämlich $F(x + \alpha)$ immer in eine Reihe entwickeln können, von welcher das erste Glied die Function, $F(x)$, selbst ist und die übrigen nach Potenzen von α fortschreiten, so dass nämlich:

$$F(x + \alpha) = F(x) + p\alpha + M\alpha^2 + N\alpha^3 + Q\alpha^4 + \ldots\ldots (1)$$

und wo, wie wir schon wissen, die Coefficienten p, M, N..... Functionen von x sind. Auch ist der erste von ihnen schon bekannt, nämlich $p = F'(x)$. Es handelt sich jetzt darum, auch die übrigen Coefficienten M, N,.... zu bestimmen, welches zur vollständigen Kenntniss der Reihe erforderlich ist.

Da nun diese Reihe die Entwickelung einer Function von der zweitheiligen Grösse $x + \alpha$ sein soll, so müssen für diejenigen Werthe von x und α, für welche die Reihe, im Fall transcendent, convergent ist, zufolge § 42, die Differential-Quotienten, in Bezug auf x und α genommen, einander gleich sein. Dies führte nun Taylor auf den nahe liegenden Gedanken, die nur vorläufig fingirten unbestimmten Coefficienten p, M, N,.... durch einfache

Differentiation zu bestimmen. Differentiiren wir nämlich die Gleichung (1), indem wir x als veränderlich und α als constant betrachten, so haben wir: *)

$$F'_x(x+\alpha)=F'(x)+\left(\frac{dp}{dx}\right)\cdot\alpha+\left(\frac{d\cdot M}{dx}\right)\cdot\alpha^2+\left(\frac{d\cdot N}{dx}\right)\alpha^3+\ldots\ldots(2)$$

Differentiiren wir dagegen die Gleichung (1), indem wir jetzt umgekehrt x als constant und α als veränderlich betrachten, so haben wir (weil $F(x)$, p, M, N.... kein α enthalten, also auch ihre Differentiale, in Bezug auf α, $=0$ sind):

$$F'_\alpha(x+\alpha)=p+2M\alpha+3N\cdot\alpha^2+4Q\cdot\alpha^3+\ldots\ldots\ldots(3)$$

Da nun [weil, § 42, $F'_x(x+\alpha)=F'_\alpha(x+\alpha)$] beide Reihen (2) und (3) für jeden Werth von α, für welchen sie convergent sind, einander gleich sein müssen, so hat man (Analys. § 64):

$p=F'(x)$, was wir schon wissen. Ferner:

$$2M=\left(\frac{dp}{dx}\right)=\frac{d\cdot F'(x)}{dx}=F''(x),\text{ woraus: } M=\frac{F''(x)}{1\cdot 2}$$

$$3N=\left(\frac{d\cdot M}{dx}\right)=\frac{d\cdot F''(x)}{1\cdot 2\cdot dx}=\frac{F'''(x)}{1\cdot 2},\quad\text{"}\quad N=\frac{F'''(x)}{1\cdot 2\cdot 3}$$

u. s. w.

Es ist mithin ganz einfach und allgemein:

$$F(x+\alpha)=F(x)+\frac{F'(x)}{1}\cdot\alpha+\frac{F''(x)}{1\cdot 2}\cdot\alpha^2+\frac{F'''(x)}{1\cdot 2\cdot 3}\cdot\alpha^3+\ldots\ldots\ldots(4)$$

oder, indem wir wieder Δx statt α setzen, in üblicher Schreibart:

$$F(x+\Delta x)=F(x)+F'(x)\Delta x+F''(x)\frac{\Delta x^2}{1\cdot 2}+F'''(x)\frac{\Delta x^3}{1\cdot 2\cdot 3}+F^{IV}(x)\frac{\Delta x^4}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}+\cdots(5)$$

und dies ist nun die merkwürdige und höchst wichtige Taylor'sche Reihe, von jetzt an das Fundament der ganzen Differential-Rechnung.

*) Durch F'_x wird angedeutet, dass in Bezug auf x differentiirt worden.

Anmerkung. Setzt man in (4) $x=0$ und $\alpha=x$, so hat man wieder die Maclaurin'sche Reihe, als speciellen Fall der Taylor'schen.

44.

*) Folgender Zusatz zu dieser Ableitung der Taylor'schen Reihe wurde uns gelegentlich von Gauss mitgetheilt:

Man kann die Sache noch von einer andern Seite betrachten. Liegt nämlich eine gesetzmässige Reihe, wie:

$$F(x)+F'(x)\cdot\alpha+F''(x)\cdot\frac{\alpha^2}{1\cdot 2}+F'''(x)\cdot\frac{\alpha^3}{1\cdot 2\cdot 3}+\ldots.$$

vor uns, so müssen wir auch umgekehrt ihre Quelle (Summe), d. h. die Function, aus welcher sie entsprungen ist, und die wir jetzt nicht kennen wollen, wieder herstellen können.

Man setze die zu findende unbekannte Function $=U$ und, in der Reihe selbst, $y-\alpha$ statt x, was erlaubt ist, so ist:

$$U=F(y-\alpha)+\alpha\cdot F'(y-\alpha)+\frac{\alpha^2}{1\cdot 2}\cdot F''(y-\alpha)+\frac{\alpha^3}{1\cdot 2\cdot 3}\cdot F'''(y-\alpha)+\ldots$$

Betrachten wir in dieser Gleichung α als eine veränderliche, von y unabhängige Grösse und y als constant, und suchen den Differential-Quotienten in Bezug auf α, so ist:

$$\left(\frac{dU}{d\alpha}\right)=\left\{\begin{matrix}-F'(y-\alpha)-\alpha F''(y-\alpha)-\frac{\alpha^2}{1\cdot 2}\cdot F'''(y-\alpha)--\ldots\\ +F'(y-\alpha)+\alpha F''(y-\alpha)+\frac{\alpha^2}{1\cdot 2}\cdot F'''(y-\alpha)++\ldots.\end{matrix}\right\}$$

Es ist also $\left(\frac{dU}{d\alpha}\right)=0$. Dies zeigt uns, dass die zu findende Function U von der Grösse α ganz unabhängig, mithin eine blosse Function von y, also $U=F(y)$ ist. Nun ist aber $y-\alpha=x$, mithin $y=x+\alpha$, folglich $U=F(x+\alpha)$.

45.

Bei der Anwendung der eben entwickelten Taylor'schen Reihe, welche, so lange man in der Function $F(x)$ die absolut veränderliche Grösse, wie bisher geschehen, ganz unbestimmt

lässt, immer möglich ist, kann der Fall eintreten, dass für specielle Werthe von x, die aus der sonst stetigen Function $F(x)$ folgenden Differential-Quotienten unendlich (unstetig) werden. So ist z. B., wenn $F(x) = \sqrt{x^2 - a^2}$, also $F'(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2-a^2}}$, $F''(x) = -\frac{a^2}{(x^2-a^2)^{\frac{3}{2}}}$ etc., nach Taylor's Theorem:

$$\sqrt{(x+\Delta x)^2 - a^2} = \sqrt{x^2-a^2} + \frac{x}{\sqrt{x^2-a^2}} \cdot \Delta x - \frac{a^2}{(x^2-a^2)^{\frac{3}{2}}} \cdot \frac{\Delta x^2}{1 \cdot 2} - \ldots$$

und man sieht, dass für jeden Werth von $x > a$, nicht nur die ursprüngliche Function $\sqrt{x^2-a^2}$, sondern auch sämmtliche Differential-Quotienten stetig sind. Für den speciellen Werth von $x = a$ aber werden sämmtliche Differential-Quotienten unendlich. Woher rührt diese Unterbrechung der Stetigkeit in den Differential-Quotienten?

Um den Grund einzusehen, warum dieser Ausnahmefall hier just für $x = a$ eintritt, beachte man, dass die Function: $\sqrt{(x+\Delta x)^2 - a^2}$, wenn wir darin x den Werth a beilegen (indem es einerlei sein muss, ob man dies, vor oder nach der Entwickelung derselben in eine Reihe, thut) sich in $\sqrt{(a+\Delta x)^2 - a^2} = (2a\Delta x + \Delta x^2)^{\frac{1}{2}}$ verwandelt. Dieser letztere Ausdruck lässt sich nun aber nicht in der geforderten, nach ganzen, positiven Potenzen von Δx fortschreitenden Form entwickeln, indem offenbar:

$$(2a\Delta x + \Delta x^2)^{\frac{1}{2}} = (2a\Delta x)^{\frac{1}{2}}\left(1 + \frac{\Delta x}{2a}\right)^{\frac{1}{2}} = (2a)^{\frac{1}{2}} \cdot \Delta x^{\frac{1}{2}}\left(1 + \tfrac{1}{2} \cdot \frac{\Delta x}{2a} - \frac{1 \cdot 1}{2 \cdot 4} \cdot \frac{\Delta x^2}{4a^2} + \ldots\right)$$

$$\sqrt{2a\Delta x + \Delta x^2} = (2a)^{\frac{1}{2}} \cdot \Delta x^{\frac{1}{2}} + \frac{1}{2(2a)^{\frac{1}{2}}} \cdot \Delta x^{\frac{3}{2}} - + \ldots$$

Diese Reihe enthält also gebrochene Exponenten, einen Verstoss gegen die Form.

46.

Wir bemerken hier ein für allemal: 1. Dass die Differentialrechnung sich nur mit stetigen Functionen beschäftigt, und dass namentlich bei Anwendung der Taylor'schen Reihe, nämlich:

$$F(x+\Delta x) = F(x) + F'(x) \cdot \Delta x + F''(x) \cdot \frac{\Delta x^2}{1 \cdot 2} + F'''(x) \cdot \frac{\Delta x^3}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \ldots$$

oder, indem man, des einfachern Schreibens halber, h statt Δx setzt:

$$F(x+h) = Fx + F'x \cdot h + \tfrac{1}{2}F''x \cdot h^2 + \tfrac{1}{6}F'''x \cdot h^3 + \ldots$$

diese Reihe auf solche Werthe von x beschränkt werden muss, für welche nicht allein $F(x)$, sondern auch sämmtliche Derivirten $F'(x)$, $F''(x)$.... stetig sind, und alsdann findet die Reihe, wie wir gesehen, immer Statt.

2. Tritt eine Ausnahme ein, welches nur für ganz specielle Werthe von x der Fall sein kann, so kann auch die Differentialrechnung, wenigstens unmittelbar, keine Dienste leisten, und die Taylor'sche Reihe, durch die Unstetigkeit der Differential-Quotienten, nur darauf aufmerksam machen, dass man einen solchen besonderen Fall auch besonders zu discutiren hat.

3. Wird in der Taylor'schen Reihe für einen speciellen Werth von x, von irgend einem Gliede an, ein Differential-Quotient unendlich, so werden es auch alle folgenden. Denn bezeichnet Q eine Function von x, welche für $x = a$, Null wird und $F^{(n)}x = \frac{P}{Q}$ irgend einen n^{ten} Differential-Quotienten, welcher also für $x = a$ also $Q = 0$, unendlich wird, so muss auch der folgende Differential-Quotient, nämlich $F^{n+1}(x) = \frac{QdP - PdQ}{Q^2} = \infty$ werden, weil offenbar für denselben Werth von x, für welchen der Nenner $Q = 0$ wird, auch alle höhern Potenzen von $Q, = 0$ werden.

4. Sind alle Derivirten von $F(x)$ stetig, so kann man Δx immer so klein annehmen, dass die Taylor'sche Reihe, wenn auch transcendent, doch nothwendig convergent sein muss. Denn sei a der grösste Coefficient in der Reihe, so wird, wenn man auch allen Gliedern diesen Coefficienten beilegt, die neue Reihe:

$$a\Delta x + a\Delta x^2 + \cdots + a\Delta x^{n-1} = a \cdot \frac{\Delta x^{n-1}}{\Delta x - 1} = \frac{a}{1-\Delta x} - \frac{a\Delta x^n}{1-\Delta x}$$

schon für jeden Werth von $\Delta x < 1$ convergent, um so mehr also die Taylor'sche Reihe (Analysis § 61).

5. Man kann in der Taylor'schen Reihe das Increment Δx immer so klein annehmen, dass jedes Glied, welches nicht Null ist, immer grösser wird, als die Summe aller folgenden. Ist z. B. (bei stetigen Differential-Quotienten) der 1ste, $F'(x)$, nicht $= 0$, so braucht man Δx nur so klein zu nehmen, dass

$$F'(x)\Delta x > F''(x)\frac{\Delta x^2}{1 \cdot 2} + F'''(x) \cdot \frac{\Delta x^3}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \cdots \text{ oder:}$$

$$F'(x) > \Delta x\left(\frac{F''x}{1 \cdot 2} + F'''x \cdot \Delta x + \cdots\right)$$

was offenbar immer möglich ist. Wem dies nicht unmittelbar einleuchtet, der lege jedem Coefficienten der eingeklammerten Reihe den Werth des grössten (a) darin, bei, so kann man Δx so klein nehmen, dass selbst noch:

$$\Delta x \cdot a(1 + \Delta x + \Delta x^2 + \cdots) < F'(x)$$

$$\Delta x \cdot a \cdot \frac{1 - \Delta x^n}{1 - \Delta x} < F'(x)$$

$$\frac{\Delta x}{1 - \Delta x} - \frac{\Delta x^{n+1}}{1 - \Delta x} < \frac{F'(x)}{a}$$

und ob n endlich oder unendlich, selbst noch:

$$\frac{\Delta x}{1 - \Delta x} < \frac{F'(x)}{a}$$

man braucht also nur $\Delta x < \frac{F'(x)}{a + F'(x)}$ zu nehmen.

47.

Hat man also irgend eine Function einer absolut veränder lichen Grösse, $y = F(x)$, und wächst x um das Increment Δx, so stellt für jedes x, für welche sämmtliche Differential-Quotienten stetig sind, die Taylor'sche Reihe:

$$y + \Delta y = F(x) + F'(x) \cdot \Delta x + F''(x) \cdot \frac{\Delta x^2}{1 \cdot 2} + \ldots.$$

den neuen Zustand der Function, so wie das sehr merkwürdige Gesetz, nach welchem er aus dem alten hervorgeht, in klarer Uebersicht vollständig dar.

Achten wir hier auf die Bedeutung der successiven Differential-Quotienten und ihre respectiven Mitwirkungen, den neuen Zustand der Function aus dem alten zu erzeugen, so ist zuvor klar, dass, wenn der 1ste Differential-Quotient positiv ist, die Function das Bestreben hat, zu wachsen, und umgekehrt, wenn er negativ ist (§ 46, 5).

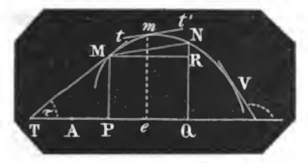
Man kann deshalb, wenn man will, den 1sten Differential-Quotienten $F'(x)$ nicht unpassend das Bestreben der Function nennen (zu wachsen oder abzunehmen, je nachdem er

positiv oder negativ ist.*) Weil nun aber $F'(x)$ wiederum eine Function von x ist, so ist dieses Bestreben nicht constant, sondern mit x veränderlich.**)

Wäre für einen speciellen Werth von x dieser 1ste Differential-Quotient, $F'(x), = 0$, so ist auch das Bestreben zu wachsen $= 0$ und die Function für diesen Werth von x gleichsam stationair.

Da nun, ausser dem Coefficienten $F'(x)$ auch die folgenden $F''(x)$, $F'''(x)$ etc. auf das Wachsthum der Function influiren, so könnte man wieder den 2ten Differential-Quotienten das Bestreben vom Bestreben nennen etc.

Der 1ste Theil dieses Satzes lässt sich geometrisch versinnlichen. Wir können nämlich der grösseren Anschauung halber den Verlauf der Function $y = F(x)$, eben weil sie stetig fliesst, immer construirt und bildlich durch eine krumme Linie dargestellt denken.



Sei deshalb $AP = x$, $MP = y$, $PQ = \Delta x$, $NQ = y + \Delta y$.

In der Taylor'schen Reihe:

$$y + \Delta y = F(x) + F'(x) \cdot \Delta x + F''(x) \cdot \frac{\Delta x^2}{1 \cdot 2} + \ldots .$$

ist nun, wie in der Einleitung (§ 11) gezeigt, der 1ste Differential-Quotient $F'(x)$ die trigonom. Tangente des Berührungswinkels τ. Ist also dieser 1ste Differential-Quotient $F'(x)$ $(= \operatorname{tg} \tau)$ positiv, so ist offenbar der Winkel τ spitz und die Ordinate MP wachsend. Umgekehrt ist es im Puncte V.

48.

*) Die in der Taylor'schen Reihe:

$$y + \Delta y = F(x) + F'(x) \cdot \Delta x + F''(x) \cdot \frac{\Delta x^2}{1 \cdot 2} + \ldots .$$

---

*) Es ist auch hiernach einleuchtend, dass die Differentiale aller Functionen, wie z. B. $\cos x$, $\cot x$, $\arccos x$ etc., welche mit wachsendem x abnehmen, nothwendig negativ sein müssen.

**) Nur in dem einzigen Falle, wenn $F(x) = ax + b$, also $F'(x) = a$, ist dieses Bestreben constant und das Wachsthum der Function $(= a . \Delta x)$ dem Incremente Δx einfach proportional.

auf $F(x)$ folgenden Glieder, welche das Wachsthum, $NR = \Delta y$, der Function von x bis $x + \Delta x$ darstellen, nämlich:

$$\Delta y = F'(x)\Delta x + F''(x) \cdot \frac{\Delta x^2}{1 \cdot 2} + \ldots .$$

lassen sich folgendermassen in ein Glied zusammenziehen (gleichsam summiren).

Zwischen den beiden Puncten M und N muss es offenbar einen so gelegenen Punct, m, geben, dass die durch ihn gedachte Berührungslinie tt' mit der Sehne MN parallel läuft und folglich mit der Abscissenlinie einen Winkel bildet, dessen trigon. Tangente $= \frac{NR}{MR} = \frac{\Delta y}{\Delta x}$ ist. Die Abscisse Ae dieses Punctes m lässt sich andeuten, indem wir zu $AP = x$ noch ein Stück von $PQ = \Delta x$ hinzulegen. Bezeichnen wir dieses Stück Pe mit $\theta \cdot \Delta x$, wo θ ein echter Bruch ist, so ist die Abscisse des in Rede stehenden, zwischen M und N liegenden Punctes m, nämlich: $Ae = x + \theta\Delta x$ und die Ordinate $me = F(x + \theta\Delta x)$ und mithin die trigonometrische Tangente des Winkels NMR auch $= F'(x + \theta\Delta x)$. Daher gewiss:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = F'(x + \theta\Delta x), \text{ folglich auch:}$$

$$\Delta y = \Delta x \cdot F'(x + \theta\Delta x), \text{ mithin:}$$

$$\Delta x \cdot F'(x + \theta\Delta x) = F'x \cdot \Delta x + F''x \cdot \frac{\Delta x^2}{1 \cdot 2} + \ldots .$$

Es existirt also immer ein, wenn auch nicht näher angebbarer echter Bruch, θ, so dass (jetzt von der Hülfsfigur abstrahirt) allgemein:

$$F(x + \Delta x) = F(x) + \Delta x \cdot F'(x + \theta\Delta x)$$

Drittes Buch.

Tangenten an Orthogonal- und Polarcurven.

49.

1. Orthogonal-Gleichungen.

Das schon in der Einleitung besprochene und ehemals sehr berühmte Problem der Tangentenziehung, welches wir jetzt wieder aufnehmen wollen, lässt sich nun durch Hülfe der Differential-Rechnung leicht vollständig lösen.

Sei nämlich ganz allgemein:

$$y = \mathrm{F}(x)$$

die gesonderte*) Function einer krummen Linie, der Bogen HG ein Stück derselben und $\mathrm{M}(x, y)$ der gegebene Berührungspunct.

Wir lassen nun (vergl. §§ 7, 8) die Abscisse $\mathrm{AP} = x$ um das Stück $\mathrm{PQ} = \mathrm{MR} = \Delta x$ wachsen, dann ändert sich auch die Ordinate $\mathrm{MP} = y$ um das Stück $\mathrm{NR} = \Delta y$ und wir haben dann für diesen neuen Zustand der Ordinate, nach dem Taylor'schen Lehrsatz:

$$y + \Delta y = \mathrm{F}(x) + \mathrm{F}'(x)\,\Delta x + \mathrm{M}\Delta x^2 + \ldots.$$

$$\text{oder:}\quad y + \Delta y = y + \frac{dy}{dx}\Delta x + \mathrm{M}\Delta x^2 + \ldots.$$

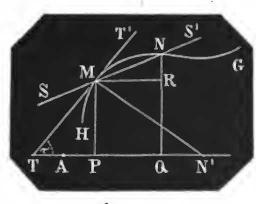
*) Die nicht gesonderten (verwickelten) Functionen werden wir später besonders betrachten.

Mithin für das Wachsthum der Ordinate:

$$\Delta y = \frac{dy}{dx} \cdot \Delta x + \mathrm{M} \cdot \frac{\Delta x^2}{1 \cdot 2} + \ldots .$$

Denken wir uns nun durch die Puncte M, N eine Secante, SS′, gezogen, so ist die trigonometrische Tangente des Winkels, den sie mit der Abscissenlinie macht, gegeben durch:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{dy}{dx} + \mathrm{M} \cdot \frac{\Delta x}{1 \cdot 2} + \mathrm{N} \cdot \frac{\Delta x^2}{1 \cdot 2} + \ldots .$$



Dreht sich nun die Secante SS′ um den Punct M, bis der Punct N mit M zusammenfällt, so kommt sie in die Lage der Berührunglinie TT′. Aus vorstehender Gleichung fallen dann aber (weil Δx bei dieser Drehung der Secante bis zu Null convergirt) alle Glieder rechter Hand, bis auf das erste $\frac{dy}{dx} = \mathrm{F}'(x)$, weg.*) Die trigonometrische Tangente des Berührungswinkels τ ist also nach den § 8 aufgestellten Gründen gleich dem ersten Differential-Quotienten. In Zeichen:

$$\operatorname{tg} \tau = \frac{dy}{dx};^{**)} \qquad \cot \tau = \frac{dx}{dy};$$

---

*) Aus diesem Grunde, weil hier nämlich nur die Grenze $\frac{dy}{dx}$ gesucht wird, welche der Quotient $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ erreicht, indem Δx und also gleichzeitig auch Δy bis zu Null abnehmen, und deshalb alle in Δx multiplicirten Glieder rechter Hand wegfallen, kommt auch die Convergenz der Reihe und überhaupt der Taylor'sche Lehrsatz hier gar nicht in Betracht. Das Problem der Tangenten verlangt nur die Kenntniss des ersten Differential-Quotienten. Und dieser, er möge für einen bestimmten Werth von x endlich oder unendlich sein, giebt immer richtig die trigonometrische Tangente des Berührungswinkels τ an. Ist dieser erste Differential-Quotient unendlich, so ist $\tau = 90^0$, die Tangente steht senkrecht auf der Abscissenlinie; ist er $= 0$, so ist auch $\tau = 0$; die Tangente geht parallel mit der Abscissenlinie etc. Die Bemerkung 1, § 46 ist nur bei Anwendung des Taylor'schen Lehrsatzes zu beachten.

**) Will man die durch den gegebenen Punct $\mathrm{M}(x,y)$ gehende Berührungslinie durch ihre Gleichung ausdrücken, so seien α, β die Coordinaten eines beliebigen Punctes derselben, dann ist: (Höhere Geometrie § 44)

$$\beta - y = (\alpha - x) \operatorname{tg} \tau, \text{ oder:}$$

$$\beta - y = \frac{dy}{dx}(\alpha - x)$$

Aus den rechtwinkligen Dreiecken MPT und MPN', in welchem letztern der Winkel N'MP offenbar $=\tau$ ist, erhält man nun leicht die Subtangente, Subnormale, Tangente und Normale. Es ist nämlich (höhere Geometrie § 44, 6) $\frac{S_t}{y}=\cot\tau$, oder $\frac{S_t}{y}=\frac{dx}{dy}$, woraus $S_t=y\cdot\frac{dx}{dy}$. Dann $T^2=y^2+y^2\left(\frac{dx}{dy}\right)^2$, woraus:

$$T=y\sqrt{1+\left(\frac{dx}{dy}\right)^2}$$

Ferner $S_n=y\operatorname{tg}\tau=y\cdot\frac{dy}{dx}$ und dann: $N=y\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}$. Oder vorkommenden Gebrauchs halber zusammengestellt:

$$S_t=y\cdot\frac{dx}{dy};\qquad T=y\cdot\sqrt{1+\left(\frac{dx}{dy}\right)^2};$$

$$S_n=y\cdot\frac{dy}{dx};\qquad N=y\cdot\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}.$$

50.

Aufgabe 1. Eine Berührungslinie an die Parabel zu ziehen, deren Gleichung:

$$y=\sqrt{ax}$$

Auflösung. Man hat hier zuerst:

$$\frac{dy}{dx}=\frac{a^{\frac{1}{2}}}{2x^{\frac{1}{2}}};\qquad \frac{dx}{dy}=\frac{2x^{\frac{1}{2}}}{a^{\frac{1}{2}}}.$$

Für $x=0$ ist $\frac{dy}{dx}=\infty$. Die Berührungslinie am Scheitel der Parabel steht also senkrecht auf der Achse. Ferner ist nach den obigen vier Formeln; wenn man darin für $\frac{dy}{dx}$, $\left(\frac{dy}{dx}\right)^2$ etc. ihre auf die Parabel bezüglichen Werthe substituirt:

$$S_t = y \cdot \frac{dx}{dy} = y \cdot \frac{2x^{\frac{1}{2}}}{a^{\frac{1}{2}}} = \sqrt{ax} \cdot \frac{2\sqrt{x}}{\sqrt{a}} = 2x$$

$$S_n = y \cdot \frac{dy}{dx} = y \cdot \frac{a^{\frac{1}{2}}}{2x^{\frac{1}{2}}} = \sqrt{ax} \cdot \frac{\sqrt{a}}{2\sqrt{x}} = \tfrac{1}{2}a$$

$$T = y\sqrt{1+\left(\frac{dx}{dy}\right)^2} = \sqrt{ax} \cdot \sqrt{1+\frac{4x}{a}} = \sqrt{ax+4x^2}$$

$$N = y\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2} = \sqrt{ax} \cdot \sqrt{1+\frac{a}{4x}} = \sqrt{ax+\tfrac{1}{4}a^2}$$

Aufgabe 2. Eine Tangente an die Exponentiallinie zu ziehen, deren Gleichung:

$$y = e^x$$

Auflösung. Man hat hier zuerst:

$$\frac{dy}{dx} = e^x = y; \quad \frac{dx}{dy} = \frac{1}{e^x} = \frac{1}{y}$$

Für $x = 0$ ist $\frac{dy}{dx} = 1$, die Tangente schneidet die Abscissenlinie unter einem Winkel, $\tau = 45^0$. Ferner ist:

$$S_t = y\frac{dx}{dy} = y \cdot \frac{1}{y} = 1$$

$$S_n = y\frac{dy}{dx} = y \cdot y = y^2 = e^{2x}$$

$$T = y\sqrt{1+\left(\frac{dx}{dy}\right)^2} = y\sqrt{1+\frac{1}{y^2}} = \sqrt{1+y^2} = \sqrt{1+e^{2x}}$$

$$N = y\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2} = y \cdot \sqrt{1+y^2} = e^x \cdot \sqrt{1+e^{2x}}$$

Die Subtangente ist also für alle Puncte dieselbe, gleich der Lineareinheit, welche bei der Construction der Exponentiallinie zu Grunde gelegt wird.

51.

Die beiden Zeichen oder Differentiale dx, dy, welche bisher immer nur verbunden, als ein einziges Zeichen, $\frac{dy}{dx}$ zur Bezeichnung des 1sten Differential-Quotienten in den entwickelten allgemeinen Formeln vorkommen, werden, des bequemeren Schreibens halber, manchmal von einander geschieden und in der Rechnung mit andern Grössen verflochten. Dies ist offenbar deshalb erlaubt, weil die Differentiale, wenn auch unbestimmt gelassene, dennoch wirkliche, in bestimmtem Verhältniss zu einander stehende Grössen sind. (§12, Rdkg.) Es ist aber einleuchtend, dass eine solche Scheidung nur eine scheinbare sein kann, und dass, wenn durch arithmetische Operationen das eine der beiden getrennten Zeichen dx, dy eliminirt wird, das andere allein in den Formeln keinen Sinn mehr haben würde und sich also von selbst mit eliminiren muss.

Wir nehmen zur Erläuterung die allgemeine Formel für die Normale an einer krummen Linie, nämlich (§ 49):

$$N = y\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}$$

Dieser Ausdruck lässt sich erstlich auch so schreiben:

$$N = y\sqrt{1+\frac{dy^2}{dx^2}}, \text{ oder auch so:}$$

$$N = y \cdot \frac{\sqrt{dx^2+dy^2}}{dx}$$

Ist nun z. B. $y = \sqrt{ax}$ die Gleichung einer krummen Linie, also $dy = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{a}{x}} \cdot dx$ und substituiren wir in vorstehender Formel, um daraus dy zu eliminiren, seinen Werth $\frac{1}{2}\sqrt{\frac{a}{x}} \cdot dx$, so erhält man:

$$N = y\frac{\sqrt{dx^2+\frac{a}{4x}dx^2}}{dx} = \frac{y\,dx\sqrt{1+\frac{a}{4x}}}{dx}$$

$$N = y\sqrt{\left(1+\frac{a}{4x}\right)} = \sqrt{ax+\tfrac{1}{4}a^2}$$

Ebenso folgt aus $\operatorname{tg} \tau = \frac{dy}{dx}$, dass (Trigonometrie § 100)

$$\sin \tau = \frac{\frac{dy}{dx}}{\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}} = \frac{dy}{\sqrt{dx^2 + dy^2}}$$

Man sieht also, dass man mit den Differentialen dx, dy, als Stellvertreter von Grössen, auch arithmetische Operationen vornehmen kann. Dieselbe Bemerkung gilt von den höheren Differential-Quotienten.

52.

*) Wir haben im Vorhergehenden gesehen, dass, wenn man in einer Function, $y = F(x)$, der absolut veränderlichen Grösse ein Increment, Δx, beilegt, das Wachsthum der Function sich durch eine nach ganzen, positiven Potenzen von Δx fortschreitenden Reihe entwickeln lässt, nämlich:

$$\Delta y = F'(x) \cdot \Delta x + M \Delta x^2 + N \Delta x^3 + \ldots.$$

Der hieraus folgende Differenzen-Quotient

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = F'(x) + M \Delta x + N \Delta x^2 + \cdots$$

hängt von x und Δx ab, nähert sich aber, wenn wir Δx bis zu 0 abnehmen lassen, einer bestimmten, nur noch von x allein abhängigen Grenze, $\frac{0}{0} = F'(x)$.

Für diesen, aus der ursprünglichen Function abgeleiteten Grenzwerth, den sogenannten Differential-Quotienten, haben wir als Stellvertreter ausser dem Zeichen $F'(x)$ auch das Zeichen $\frac{dy}{dx}$ in die allgemeinen Formeln eingeführt.

Diese Methode, den Differential-Quotienten zu bestimmen, nach welcher nämlich das Increment Δx in der Reihe für $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ bis zu 0 abnehmen muss und mithin die Differentiale dx, dy wirkliche Nullen sind, nennt man die Grenzmethode. Sie ist vollkommen streng und sicher und weil sie am populärsten ist, auch für den ersten Anfänger wohl am passendsten. Es giebt nun

aber noch eine andere, nach ihrem Erfinder benannte Leibnitz'sche oder Infinitesimal-Methode, nach welcher die Differentiale dx, dy unendlich kleine Grössen bedeuten, und welche, namentlich in den zahlreichen Anwendungen der Infinitesimal-Rechnung auf Naturwissenschaften, weit fruchtbarer, kürzer und auch viel natürlicher ist, als die schwerfälligere Grenzmethode, indem erstere die Mittel zu den zu erlangenden Resultaten gleichsam voraussehen lässt, weshalb sie auch von allen grossen Mathematikern, welche wirklich etwas geleistet haben, stets angewandt worden. Wir wollen versuchen, auch von dieser, freilich sehr subtilen Infinitesimalmethode eine Vorstellung zu geben, jedoch alle Sätze, die sich auf dieselbe beziehen, durchgehends mit einem Sternchen bezeichnen, damit der Anfänger sie nöthigenfalls auch alle unbedenklich überschlagen und sich an die Grenzmethode halten kann, welche hier in den Anwendungen der Differential-Rechnung, der Sicherheit halber, immer voraufgehen soll.

53.

*) Die Vorstellung einer unendlich kleinen Grösse entspringt nothwendig aus dem Begriffe der Stetigkeit, den ein jeder Mensch hat.

Zufolge unsers Vorstellungsvermögens können wir eine veränderliche (fliessende) Grösse, z. B. die Abscisse $AP = x$, auf zweierlei Weise um ein Stück, $PQ = \Delta x$, wachsen lassen, nämlich durch unstetige und auch durch stetige Zunahme.

Ich kann dem AP das Stück PQ auf einmal hinzufügen oder auch den hundertsten Theil hundertmal, den millionsten Theil millionenmal etc. In wie viele bestimmte, also auch durch Zahlen angebbare Theile man aber auch PQ theilen und dann die sämmtlichen Theile einzeln dem AP hinzufügen möge, so wird auf diese Weise die Grösse AP doch immer unstetig (sprungweise) wachsen.

Lassen wir jetzt aber AP, von P bis Q, stetig wachsen, indem wir uns, der leichtern Auffassung halber, vorstellen: ein Punct beschreibe die Linie PQ, so kann offenbar kein zwischen P und Q liegender Zustand übersprungen werden, indem der beschreibende Punct durch alle möglichen, deshalb aber auch unzählbaren Zustände geht.

Fragen wir nun: was ist, bei diesem stetigen Wachsen von P bis Q, die stetige (successive, allmälige, augenblick-

liche) Zunahme der fliessenden Grösse AP, so können wir erstens doch gewiss nicht sagen, dass sie Nichts, = 0 ist; denn durch Hinzufügung von lauter absoluten Nullen (Nichtssen) kann die Grösse AP nicht wachsen; zweitens können wir auch nicht sagen, dass bei diesem stetigen Wachsen die successiven (momentanen) Zunahmen der fliessenden Grösse AP, Etwas, durch eine bestimmte, wenn auch noch so grosse Zahl, angebbares seien, weil ja in diesem Falle die Grösse AP nicht stetig, sondern sprungweise wüchse. Die Zustände, in welche der beschreibende Punct kommt, sind unzählbar und deshalb kann die fragliche stetige Zunahme nicht angegeben werden.

54.

*) Es ist also das Gesetz der Stetigkeit, welches nns zu der Vorstellung drängt: Dass die successiven Zunahmen einer stetig wachsenden Grösse zwar keine absolute Nullen, jedoch auch keine angebbare (wirkliche) Grössen, sondern der Stetigkeit halber wahrhaft einfach, d. h. untheilbar sind.

Dieses übersinnliche, in unserm Geiste haftende, aber nicht angebbare Etwas nennt Leibnitz eine Infinitesimal- oder unendlich kleine Grösse. Eine solche ist also nur ein Gedankending, oder Abstraction von aller angebbaren Grösse.

Das Wort „Grösse“ führt immer auf die Vorstellung eines Quantums, dessen Verhältniss zu einer beliebigen endlichen Einheit sich durch eine, wenn auch noch so grosse, jedoch bestimmte Zahl muss angeben lassen. Da nun dies aber in Betreff des unendlich Kleinen nicht möglich ist, so finden Manche das Wort „Grösse“ anstössig, nicht beachtend, dass das davor stehende Wort; unendlich klein, diese Anstössigkeit aufheben soll. Man hätte das unendlich Kleine auch eine virtuelle Grösse nennen können, so wie man in der Mechanik von virtueller Geschwindigkeit spricht, um damit anzudeuten, dass keine actuelle (wirkliche) Geschwindigkeit Statt findet.

55.

*) Auf die Vorstellung einer Infinitesimalgrösse kommt man auch durch die Vorstellung einer in's Unendliche gehenden Theilung einer endlichen Grösse. Hierin geht also die Mathematik noch weiter, als die Chemie, die bis jetzt noch immer bei materiellen Atomen stehen geblieben ist, aber wohl nicht immer stehen bleiben wird.

In der Algebra § 329 haben wir an einem handgreiflichen Beispiele gezeigt, dass jede endliche Grösse, z. B. die Lebensdauer eines Menschen, durch fortgesetztes Halbiren zwar in eine unendliche, nicht angebbare Anzahl Theile getheilt werden kann, jedoch die Theilung ein Ende nehmen muss und dass der letzte Theil, obwohl von der absoluten Null verschieden, doch auch nicht mehr angebbar, sondern eine Infinitesimalgrösse, ein Hauch, ein Augenblick ist. „The infinitesimal is the ghost of the departed quantity".

Dass die Arbeit dieser unzähligen Theilungen, die selbstverständlich nicht wirklich, sondern, worauf es nur ankommt, in Gedanken auszuführen und dann keine endlose ist, ergiebt sich auch folgendermassen: *) Jede so zu theilende endliche Zeit kann man sich unter dem Bilde einer Linie, PQ, vorstellen und diese durch einen sich bewegenden Punct stetig beschrieben denken, womit dann, nämlich durch die mit zu Hülfe genommene Vorstellung der Bewegung, die sonst endlose Arbeit sogleich vollzogen ist. Der Punct halbirt die Linie PQ, wenn er in der Mitte ist und hat zugleich auch alle vorhergehende Viertel, Achtel etc. halbirt. Dasselbe gilt offenbar von der folgenden Hälfte.

Wollte man nun behaupten, dass der letzte der auf einander folgenden unzählbaren einfachen Theile noch theilbar sei, so wäre entweder die Arbeit (der Lauf des beschreibenden Punctes) noch nicht vollendet, oder der Punct nicht stetig, sondern durch einen Sprung nach Q gekommen; und wollte man behaupten, dass der letzte einfache Theil absolut Null sei, so fiele man in die grosse Schwierigkeit, den vorletzten einfachen Theil in zwei

---

*) Leibnitz wandte dieses in's Unendliche fortgesetzte Theilen einer endlichen Grösse auch auf die Materie an, um dadurch zu den wahren Bestandtheilen derselben zu gelangen, und Herbart sagt darüber mit Recht: «Noch ehe man durch den vorliegenden Klumpen den ersten bestimmten Schnitt hindurchgeführt, liegt die unendliche Möglichkeit am Tage, dass man diesen nämlichen Schnitt auf unendlich vielfache Weise anders hindurchführen könnte. Hiemit ist wirklich die ganze, unendliche Theilung auf einmal vollzogen; und man hat die letzten Theile erreicht, nämlich in Gedanken, worauf es allein ankam. Diese letzten Theile können keine Materie sein» (weil man sonst stets wieder von Neuem diese unzähligen Theilungen unzählige mal wiederholen müsste, was ungereimt ist). «Daraus sollte man nun sogleich schliessen, wie schon Leibnitz schloss: Es ist falsch, dass die Materie zuletzt wieder aus Materie bestehe; ihre wahren Bestandtheile sind einfach (einfache Wesen, Substanzen, Monaden). Und so ist es der Wahrheit gemäss.» (Herbart's Methaphysik.)

Nullen getheilt, ja das Ganze durch fortgesetztes Theilen rein vernichtet zu haben und dann rückwärts das Ganze aus lauter Nullen (Nichtssen) wieder herstellen zu müssen, was wir nicht können. Eine totale Vernichtung einer Grösse durch fortgesetztes Theilen ist ebenso absurd, als umgekehrt irgend eine Schöpfung aus Nichts. Deshalb ist es gewiss leichter, die hier fraglichen Theile als absolut einfach, untheilbar zu denken. Wir können uns keine Zeit als den Verfluss von lauter Nichtssen, wohl aber als den Verfluss von lauter untheilbaren Augenblicken vorstellen.

Eine unendlich kleine Grösse, im absoluten Sinne genommen, muss durchaus als absolut einfach (untheilbar) gedacht werden, und eben deshalb ist sie auch nur ein Gedankending (nicht angebbar). Auch die Natur operirt mit Infinitesimalgrössen. „Die Natur macht keinen Sprung“, und kann keinen machen. Alles wächst, wird und entsteht nur nach dem Gesetze der Stetigkeit. Und aus diesem Grunde ist die Infinitesimalrechnung für die Naturwissenschaften von so grosser Wichtigkeit und Nothwendigkeit.

56.

*) Denkt man sich eine endliche Grösse unter dem Bilde einer Linie, Fläche, Körper, durch Bewegung (Fliessen) erzeugt, so kann man sich dieselbe auch als aus untheilbaren Elementen zusammen gesetzt denken. Wirft man dabei aber die Frage auf: wie viel solcher Elemente dazu erforderlich sind, so folgt, dass — weil eine wirkliche Grösse (die Linie PQ z. B.) in eine unendliche Zahl gleicher Theile getheilt gedacht werden muss, um auf die wahren Elemente zu kommen — auch umgekehrt eine unendliche (unangebbare) Anzahl solcher Elemente erforderlich ist, um eine wirkliche (angebbare) Grösse zu erhalten, und dass dazu eine bestimmte, wenn auch noch so grosse endliche Anzahl (tausend; millionen etc.) nicht genügt. Ein solches untheilbare Element oder auch ein bestimmtes endliche Vielfache desselben zu einer endlichen Grösse hinzugedacht, kann das eigentliche Quantum derselben nicht um eine angebbare Grösse ändern, sondern nur das geringere oder grössere Bestreben zu wachsen andeuten. Deshalb werden auch alle die Grössen, die endliche Vielfache des untheilbar gedachten Elements enthalten, dennoch — weil nicht angebbar — Infinitesimal — oder unendlich kleine Grössen genannt. Auch diese sind also nur in Gedanken theilbar, jedoch nicht wieder in's

Unendliche, weil sie ja nur als endliche Vielfache des untheilbaren Elements in Gedanken existiren.

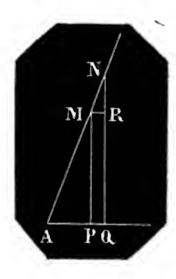
57.

*) Consequenterweise folgt hieraus, dass von unendlich kleinen Grössen derselben Art die eine beliebige mal grösser oder kleiner sein kann, als die andere, und dass man deshalb das unendlich Kleine nicht immer absolut nehmen muss, d. h. als wenn es nicht noch kleiner gedacht werden könnte oder gedacht werden müsste. Dasselbe muss offenbar auch von den sogenannten unendlich grossen Grössen gelten. Die unbegrenzt gedachte unendliche Fläche z. B., welche zwischen zwei endlosen Parallelen liegt, muss bei einem m mal grössern Abstande derselben auch m mal grösser gedacht werden. Die unendliche Anzahl untheilbarer Elemente, welche eine endliche Grösse enthält, muss bei einer gleichartigen $m$fachen Grösse auch m mal so gross sein.

58.

*) So wie es also verschiedene endliche Grössen derselben Art giebt, so können wir uns auch verschiedene gleichartige unendlich kleine und unendlich grosse Grössen denken, die gleich wie die endlichen jedes beliebige Verhältniss zu einander haben und aus diesem Grunde arithmetischen Operationen unterworfen werden können. Sei z. B.:

$$y = 3x$$



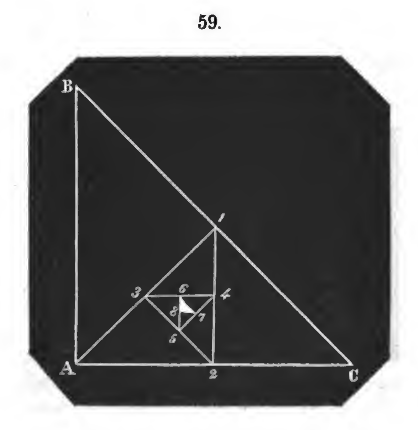
die Gleichung einer graden Linie, bei welcher also, für jeden Zustand der Abscisse x, die zugehörige Ordinate y immer dreimal so gross ist. Wird die Abscisse x unendlich, so wird es auch die Ordinate, obgleich doch beide unendlich grosse Grössen verschieden gedacht werden müssen. Denn, vermöge der Beziehung zwischen beiden veränderlichen Grössen, wird für $x = \infty$, $y = 3 \cdot \infty$, aber dennoch immer $\frac{y}{x} = \frac{3 \cdot \infty}{\infty} = 3$.

Lassen wir die Abscisse $AP = x$ um $PQ = \Delta x$ wachsen, so wächst die Ordinate $MP = y$ um das Stück $NR = \Delta y$ und es ist: $y + \Delta y = 3(x + \Delta x)$, woraus $\Delta y = 3\Delta x$, folglich $\frac{\Delta y}{\Delta x} = 3$.

Stellen wir uns nun vor: Die Ordinate NQ bewege sich, parallel mit sich selbst, gegen MP hin, so werden die Seiten des bei R rechtwinkligen Dreiecks NMR immer kleiner und kleiner, dennoch aber stets in demselben Verhältniss zu einander bleiben.

Denken wir uns nun dieses Dreieck so klein geworden, dass es nicht mehr kleiner werden kann, ohne gänzlich zu verschwinden (absolut Null zu werden) — in welchem Zustande (Moment) es das characteristische Dreieck genannt wird — so werden nach dem Vorhergehenden seine Seiten zu Infinitesimalgrössen, die aber in diesem verschwindenden Zustande, wo von angebbarer Grösse nicht mehr die Rede sein kann, doch immer noch dasselbe eben erwähnte Verhältniss zu einander haben. Denkt man sich hiebei die unendlich klein gewordene Cathete MR als untheilbar, so können nach § 57 die andere unendlich kleine Cathete sowohl, als die unendlich kleine Hypotenuse, in Gedanken noch als theilbar gedacht werden; die gleichsam in einem Punct verschwundene unendlich kleine Fläche des characteristischen Dreiecks aber kann dann nach der Abscissenrichtung, d. h. durch eine mit der Ordinatenachse parallele Linie selbst in Gedanken nicht mehr getheilt werden.

59.



*) Dass eine in's Unendliche gehende Theilung, wenn man dabei die Vorstellung der Bewegung mit zu Hülfe nimmt, als

wirklich vollendet und das letzte Glied als untheilbar gedacht werden muss, zeigt auch folgendes Beispiel.

Sei ABC ein bei A rechtwinkliges gleichschenkliges Dreieck und AB = AC = 1, folglich BC = $\sqrt{2}$. Denkt man sich, von A ausgehend, in einerlei Drehung die Perpendikel $\overline{A1}$, $\overline{12}$, $\overline{23}$ etc. in infinitum gefällt, so sieht man erstlich, ohne alle Rechnung, dass die Summe s aller dieser unzählbaren Perpendikel gleich der Hypotenuse plus der einen Cathete, also $s = 1 + \sqrt{2} = 2{,}414..$ sein muss. Denn das 1ste, 3te, 5te... Perpendikel ist gleich $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{8}$,... der Hypotenuse und das 2te, 4te, 6te... Perpendikel gleich $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{8}$,..... der Cathete.*) Ein Punct, mit der Geschwindigkeit = 1, würde sie alle in weniger als $2\frac{1}{2}$ Secunden durchlaufen und die scheinbar unendliche Arbeit in dieser Zeit vollenden. Dass die Arbeit ein Ende nimmt, folgt auch noch daraus, dass man die Coordinaten x,y des Ortes angeben kann, wo der, die Perpendikel beschreibende Punct wirklich liegen bleibt, indem die Seiten der entstehenden Dreiecke unendlich klein, die Catheten untheilbar werden und deshalb eine weitere Perpendikelfällung nicht mehr Statt findet.

Die Seiten des Dreiecks 6, 7, 8 sind denen des Dreiecks BCA parallel. Dasselbe gilt von den folgenden Dreiecken 14, 15, 16; 22, 23, 24 etc. Die Seiten des Dreiecks 6, 7, 8 sind offenbar $\frac{1}{16}$ von den ähnlich liegenden Seiten des Dreiecks BCA. Ebenso sind die Seiten des Dreiecks 14, 15, 16 wiederum $\frac{1}{16}$ von den Seiten des Dreiecks 6, 7, 8 etc. etc. Die Catheten der Dreiecke 6, 7, 8; 14, 15, 16 etc. sind also, weil AC = 1, beziehungsweise: $\frac{1}{16}, \frac{1}{16^2}, \frac{1}{16^3}$ .... in inf. Die von A aus auf AC

*) Will man diese Summe s durch Rechnung finden, so hat man (weil AC = 1): $\overline{A1} = \cos 45^\circ$; $\overline{12} = \cos^2 45$; $\overline{23} = \cos^3 45$ etc., folglich (Algebra § 254):

$$s = \cos 45 + \cos^2 45 + \cos^3 45 + \ldots \text{in inf.}$$

$$s = \frac{\cos^{\infty} 45 - \cos 45}{\cos 45 - 1}$$

Das erste Glied im Zähler ist eine Infinitesimalgrösse und kann nach § 56 das Quantum der endlichen Grösse $-\cos 45$, nicht ändern, daher, was das hier fragliche angebbare Quantum betrifft, ganz genau:

$$s = \frac{\cos 45}{1 - \cos 45} = \frac{\sin 45}{1 - \cos 45} = \frac{2.\sin 22\frac{1}{2}.\cos 22\frac{1}{2}}{2.\sin^2 22\frac{1}{2}}$$

$$s = \cot 22\tfrac{1}{2}^\circ = 2{,}414\ldots.$$

gemessene Abscisse des Punctes 8 ist (weil AC = 1) offenbar $= \frac{1}{2} - \frac{1}{8} = \frac{3}{8} \cdot 1$. Ebenso ist die Abscisse des Punctes 16, von 8 aus auf $\overline{8,7}$ gemessen, $= \frac{3}{8} \cdot \frac{1}{16}$ etc. Folglich die fragliche Abscisse:

$$x = \frac{3}{8} + \frac{3}{8} \cdot \frac{1}{16} + \frac{3}{8} \cdot \frac{1}{16^2} \ldots \text{ in inf.}$$

$$x = \frac{2}{5} \text{ und ebenso } y = \frac{1}{5}.$$

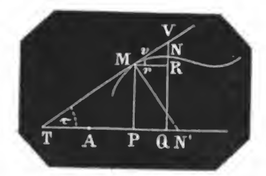
60.

*) Um die Vorstellung von den Infinitesimalgrössen noch mehr aufzuhellen und zu zeigen wie Leibnitz sie mit glänzendem Erfolg als Hülfsgrössen gebraucht, indem er sie, gleichnissweise wie $\sqrt{-1}$, consequenterweise und als wenn es wirkliche Grössen wären, allen arithmetischen Operationen unterwirft, haben wir uns zuvor noch über die richtige Deutung der aus solchen Operationen hervorgehenden Resultate, in welchen die unendlich kleinen Grössen potentiirt, mit einander multiplicirt und auch mit endlichen Grössen combinirt vorkommen können, zu verständigen.

61.

*) Rechnen können wir nur mit Zahlen. Da wir diese aber, statt durch Ziffern, auch durch proportionirte Linien ausdrücken können, so kann man auch jede gesonderte stetige Function zweier veränderlichen Grössen, und von solchen ist vorläufig nur die Rede, nämlich:

$$y = F(x)$$



immer bildlich durch eine entsprechende krumme Linie darstellen.

Sei deshalb AP $= x$, MP $= y$, PQ $= \Delta x$, NR $= \Delta y$, so ist, wie in §§ 10 und 11 gezeigt:

$$\Delta y = p\Delta x + M\Delta x^2 + N\Delta x^3 + \ldots\ldots$$

Stellen wir uns nun vor: die bis zur Berührungslinie verlängerte Ordinate NQ rücke, parallel mit sich selbst, gegen MP hin, bis die Seiten des mit MPT ähnlichen Dreiecks VRM unendlich klein werden und das verschwindende Dreieck *vr*M ein characteristisches wird, so müssen in obiger Gleichung von den in Δx, Δx^2, Δx^3 etc. multiplicirten Gliedern, welche Leibnitz zur Abkürzung des Vortrags unendlich kleine Grössen erster, zweiter, dritter etc. Ordnung nennt, alle Glieder, von der zweiten Ordnung an, als nur rein formell, in der Wirklichkeit aber nicht existirend, wegfallen. Denn ob man eine unendlich kleine Grösse $\Delta x = \frac{1}{\infty}$, formell durch eine unendliche Zahl (∞) dividirt, oder mit sich selbst multiplicirt, $\Delta x^2 = \frac{1}{\infty^2}$, das ist einerlei. Da wir nun hier aber den unendlich kleinen Unterschied der Ordinate MP $= y$ von der unmittelbar (stetig) folgenden Ordinate ausdrücken wollen, so fordert offenbar das Gesetz der Stetigkeit, sich Δx als untheilbar zu denken, weil eine wirkliche (angebbare), wenn auch noch so kleine Grösse theilbar ist und einen Sprung hervorrufen würde. Kann aber Δx nicht mehr kleiner werden, ohne gänzlich zu verschwinden, was es nicht soll, so kann in diesem kleinsten verschwindenden Zustand $\Delta x = \frac{1}{\infty}$ nicht weiter getheilt, also auch nicht mit sich selbst multiplicirt werden, weil dies ja eine fernere Theilung involviren würde. Ohnehin ist es ungereimt, eine schon als unendlich klein gedachte Grösse in demselben Sinne nochmals wieder in unendlich viele Theile zu theilen und diese Theilungen, im Fall in vorstehender Gleichung die Anzahl der in Potenzen von Δx multiplicirten Glieder eine unendliche ist, unendliche mal wiederholt zu denken.

Um das Gesetz der Stetigkeit zu befolgen, muss in der Differenzengleichung:

$$\Delta y = p\Delta x + \mathrm{M}\Delta x^2 + \mathrm{N}\Delta x^3 + \cdots$$

die Grösse Δx nothwendig unendlich klein werden und dann die in Potenzen von Δx multiplicirten Glieder, welche in diesem Fall in der Gleichung keinen Sinn mehr haben, nothwendig wegfallen, oder wie Leibnitz es mit andern Worten ausdrückt: In einer Summe unendlich kleiner Grössen verschwindet eine

unendlich kleine Grösse höherer Ordnung gegen die einer niedern Ordnung, also $N \cdot \Delta x^3$ gegen $M\Delta x^2$ und $M\Delta x^2$ gegen $p\Delta x$.

Das, wegen des Gesetzes der Stetigkeit, im Geiste noch haften bleibende erste Glied $p\Delta x$ nennt Leibnitz das Differential der Function $F(x)$ und bezeichnet es, weil y Stellvertreter dieser Function ist ($y = F(x)$), mit dy. Ebenso nennt er Δx, in dem verschwindenden Zustand gedacht, *) das Differential der unabhängig veränderlichen Grösse x und bezeichnet es, um diesen Zustand anzudeuten, mit dx, so dass also die aus obiger Differenzengleichung hervorgehende und das Gesetz des stetigen Fortschritts ausdrückende Differentialgleichung ganz genau:

$$dy = p \cdot dx$$

ist.

62.

*) Ein zweiter Grund, dass in der Differenzengleichung, wenn man das Increment Δx, mithin auch Δy, bis zu Infinitesimalgrössen (Differentialen) dx, dy abnehmen lässt, nämlich in der dann so zu schreibenden Gleichung:

$$dy = pdx + Mdx^2 + Ndx^3 + \ldots.$$

die sogenannten unendlich kleinen Grössen höherer Ordnungen nur rein formell enthalten sind und wegfallen müssen, ergiebt sich auch, wenn man, um das Verhältniss des blossen Wachsthum-Bestrebens beider veränderlichen Grössen x, y zu erhalten, beiderseits durch dx dividirt. Es ist dann:

$$\frac{dy}{dx} = p + Mdx + Ndx^2 + \ldots..$$

Im Rechnungsresultat ist nun p eine, durch einen gegebenen Werth von x, völlig bestimmte Grösse (§ 46, 1 und 2), deren Quantum, zufolge § 56, nicht durch die unendlich kleine Grösse erster und viel weniger durch die einer höhern Ordnung geändert werden kann, so dass also auch hiernach, nämlich nach § 56, ganz genau $\frac{dy}{dx} = p$, woraus dann wieder, in anderer Schreibweise: $dy = pdx$.

*) Newton sagt: Man muss sich die verschwindenden Grössen, z. B. die Seiten eines characteristischen Dreiecks, nicht denken, bevor sie verschwinden, auch nicht, nachdem sie verschwunden, sondern im Moment des Verschwindens selbst!

Man kann auch noch so schliessen: Aus demselben Grunde, wie Mdx gegen p, muss auch Ndx^2 gegen Mdx verschwinden etc.; denn es ist:

$$Mdx + Ndx^2 = (M + Ndx)\,dx$$

und hier verschwindet in der Klammer, nach § 56, die Infinitesimalgrösse Ndx gegen die endliche Grösse M, folglich auch Ndx^2 gegen Mdx.

Obwohl die gleichzeitigen unendlich kleinen Zunahmen der von einander abhängigen Grössen x, y, nämlich ihre Differentiale dx, dy, nicht angebbar sind, so können wir doch, wenn $y = F(x)$ gegeben, für jeden Werth von x ihr Verhältniss zu einander, d. h. den Differential-Quotienten $\frac{dy}{dx}$ angeben und darauf kommt es immer nur an.

Die hier zusammengehörigen Differentiale der absolut und abhängig veränderlichen Grössen, nämlich dx, dy, heissen auch unendlich kleine Grössen einerlei (erster) Ordnung, obgleich die eine beliebige mal grösser sein kann, als die andere, was ja von der Beschaffenheit der Function $y = F(x)$ und dem Werthe von x oder der Lage der Berührungslinie abhängt.

63.

*) Giebt die Gleichung $y = F(x)$ construirt eine krumme Linie, so ist das Wachsthumbestreben der Ordinate veränderlich. Wir wollen hierbei drei Fälle besonders hervorheben.

1. Wäre in der Differential-Gleichung: $dy = p \cdot dx$, für einen bestimmten Werth von x, der Differential-Coefficient p ein echter Bruch, hätte man z. B. die Gleichung der graden Linie $y = \frac{1}{3}x$, woraus: $dy = \frac{1}{3} \cdot dx$ und man wollte hier dx als absolut untheilbar denken, so muss man, weil dann eine weitere Theilung nicht möglich ist, die Multiplication des Differentials dx mit einem echten Bruch, als eine bloss angedeutete Rechnungsoperation betrachten, die vollzogen werden sollte, wenn dx noch theilbar wäre. So sind doch $\sqrt[3]{2}$, $\sqrt{-1}$ etc. auch nur angedeutete Operationen, die gar nicht vollzogen werden können. Es hiesse offenbar der Mathematik Fesseln anlegen, wenn man in rein formeller Hinsicht solche nur angedeutete, wenn auch unausführbare Operationen verbannen wollte. Da wir aber einmal, der leichteren Auffassung halber, die Vorstellung der Bewegung mit hereingezogen haben, so kann man auch noch,

mit Newton, den Begriff der Geschwindigkeit mit zu Hülfe nehmen und die Differential-Gleichung: $dy = \frac{1}{3} \cdot dx$ auch so deuten: das Wachsthumbestreben der Ordinate ist nicht so gross, als das der Abscisse oder, was dasselbe sagt: die Geschwindigkeit (Intensität), mit welcher die, parallel mit sich selbst fortgleitende Ordinate die absolut untheilbar gedachten Elemente der Abscissenlinie durchläuft, ist nicht dieselbe als die, mit welcher sich der, die krumme Linie beschreibende Punct in der Ordinatenrichtung bewegt (Anal. Geom. pag. 19, 3). Hieraus erklärt sich auch, weshalb die an Grösse noch so verschiedenen Seiten eines Dreiecks doch gleichzeitig in den verschwindenden Zustand kommen, indem das Dreieck sich in ein characteristisches verwandelt.

Zufolge § 56 ist es aber auch gar nicht nöthig, sich die eine der zusammengehörigen unendlich kleinen Grössen dx, dy im absoluten Sinne, als untheilbar, zu denken, weil ja ein endliches Vielfache eines solchen Elements noch kein wirkliches (angebbares) Quantum giebt.

2. Wäre in $dy = p \cdot dx$, für einen bestimmten Werth von x, der Differential-Coefficient p, $= 0$, so würde dies bedeuten: Die Ordinate hat an dieser Stelle gar kein Bestreben zu wachsen; ihr oberer Endpunct geht auf einem unendlich kleinen Weg $\pm dx$ mit der Abscissenlinie parallel.

3. Wäre endlich in $dy = p \cdot dx$, für einen besonderen Werth von x, der Differential-Coefficient p, $= \infty$, so würde das bedeuten, dass das Element der krummen Linie (welches, wie § 66 gezeigt werden soll, grade ist) an dieser Stelle senkrecht auf der Abscissenrichtung steht.

64.

*) Wir können deshalb auch, ohne in Widersprüche zu gerathen, mit den znsammengehörigen Infinitesimalgrössen in formeller Hinsicht, wie schon § 52 gezeigt, arithmetische Operationen vornehmen und dabei das Differential der absolut veränderlichen Grösse, obgleich es, wie gesagt, gar nicht nothwendig ist, dennoch, der Einfachheit halber, immer als absolut untheilbar annehmen. Die durch solche Operationen entstehenden Gleichungen werden immer von selbst homogen, d. h. keine unendlich kleine Grössen verschiedener Ordnungen enthalten, weil ja die höheren gegen die niederen wegfallen. Uebrigens haben wir schon angedeutet, dass der Ausdruck: unendlich kleine

Grössen höherer Ordnungen nur eine Redensart ist, weil es selbst für die kühnste Phantasie unmöglich und ungereimt ist, eine unendlich kleine Grösse, z. B. das Element einer Linie, Zeit (Punct, Augenblick) nochmals wieder in unendlich viele Theile zu theilen und, wohlgemerkt, solche Theilungen unendliche mal wiederholt zu denken $\left(\frac{1}{\infty^{\infty}}=?\right)$. In den vorkommenden Ausdrücken $\frac{d^n y}{dx^n}$ und $\frac{dy^n}{dx^n}$ ist weder der Zähler, noch der Nenner ein unendlich Kleines n^{ter} Ordnung. Ersterer Ausdruck deutet in conventioneller Schreibweise eine $n$malige Operation und ebenso der zweite die n^{te} Potenz einer endlichen Grösse p an, indem $\frac{dy^n}{dx^n}=\left(\frac{dy}{dx}\right)^n=p^n$.

65.

*) In räumlicher Hinsicht jedoch, aber auch nur räumlich, lassen sich unendlich kleine Grössen von der zweiten und dritten Ordnung, aber auch nicht weiter, geometrisch deuten, oder ihnen ein Substrat unterlegen. Man kann sich nämlich aus den unendlich kleinen Seiten eines characteristischen Dreiecks characteristische Quadrate, Rechtecke, Cuben, Prismen construirt denken (dx^2, dy^2, $dx\cdot dy$, dx^3 etc.). Die Ordinate $MP=y$ bildet mit der unendlich kleinen Abscisse dx ein unendlich schmales Rechteck, ($y\cdot dx$), welches wir wieder, jedoch nur in der Richtung der Ordinate, in unendlich viele unendlich kleinere Rechtecke, ($dx\cdot dy$), getheilt denken können, wo dann $y\cdot dx$ eine unendlich kleine Fläche erster und $dx\cdot dy$ zweiter Ordnung wäre. Ein unendlich dünnes Prisma kann man sich nach zwei auf einander senkrechten Richtungen in unendlich kleine Prismen zweiter und dritter Ordnung getheilt denken, wie es später die Integral-Rechnung wirklich thut und thun muss.

66.

*) In dem verschwindenden characteristischen Dreieck vrM (§ 61) — behauptet Leibnitz ferner — fällt das unendlich kleine Element Mv der krummen Linie oder das Differential derselben, welches er mit ds bezeichnet, mit der Berührungslinie am Puncte M ganz genau zusammen und muss folglich auch als wirklich grade betrachtet werden, so dass also die Berührungs-

linie TV nichts anders, als die Verlängerung dieses Elements *ds* ist. Auch dieser für die Folge wichtige Satz lässt sich rechtfertigen.

Zwei unmittelbar d. h. ohne Zwischenintervall auf einander folgende untheilbare Elemente (Kürze halber Puncte genannt) müssen nothwendig, weil aneinander, in grader Linie liegen. Drei unmittelbar (consecutiv) auf einander folgende Puncte können zwar auch noch in grader Linie liegen, jedoch auch so arrangirt sein, dass die dadurch gehende Linie gebogen, ja selbst geknickt ist, so dass die durch die beiden ersten Puncte bestimmte Richtung nicht nothwendig durch den dritten Punct geht. Soll ein sehr kleines Stück einer krummen Linie gebogen sein, so muss offenbar zwischen den beiden Endpuncten wenigstens noch ein Punct (Element) liegen, um welchen die Biegung geschah. Hieraus folgt nun aber, dass man ein unendlich kleines Stück einer krummen Linie (indem man nöthigenfalls zwei an einander liegende Puncte dafür nimmt) als wirklich grade betrachten kann.

67.

*) Weitere Ueberlegung zeigt, dass bei verschieden gekrümmten Linien die Elemente (Differentiale), welche man als grade betrachten kann, an Grösse sehr differiren und deshalb ebenso, wie die unendlich kleinen Seiten im characteristischen Dreieck, jedes beliebige Verhältniss zu einander haben können.



Beispiels halber denke man sich mit verschiedenen Radien concentrische Kreisbögen, DE, FG···, beschrieben und durch die beiden Puncte *a*, *b* des ersteren die Radien CH, CK gezogen. Die beiden Puncte *a*, *b* denke man sich zuerst aneinander liegend, so dass, nach dem Vorhergehenden das Element *ab* gewiss grade ist, so brauchen offenbar, damit auch HK für grade genommen werden darf, die beiden Puncte H und K, wegen der geringeren Krümmung des Bogens FG, nicht aneinander zu liegen. Denn fallen Sehne und Tangente mit dem Element *ab* zusammen, so muss es auch, der Aehnlichkeit halber, mit HK der Fall und folglich auch das grössere Element HK grade sein. Was aber vom Bogen HK gilt, gilt sofort auch vom Bogen *ab*, indem man

sich noch mit immer kleineren Radien concentrische Bögen aus C beschrieben denken kann. Wäre der Radius unendlich gross, so würde das als grade zu betrachtende Bogenstück eine endliche Grösse sein können.

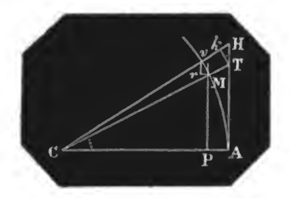
Hieraus erklärt sich nun auch, weshalb man in der Elementar-Geometrie nothwendig auf ganz richtige Resultate kommen muss, indem man sich den Kreis als Summe von unendlich vielen Dreiecken, ferner das Stück DFGE eines Kreisringes, oder die Seitenfläche eines abgekürzten graden Kegels, als Summe von unendlich vielen Trapezen von unendlich kleinen graden Grundlinien vorstellt. Zugleich leuchtet auch ein, dass sich die Grössen der als grade zu betrachtenden Elemente verschiedener Kreisbögen wie ihre Radien und ebenso die als eben zu betrachtenden ähnlichen Elemente verschiedener Kugelflächen wie die Quadrate ihrer Radien verhalten. Deshalb muss auch von der Oberfläche einer grösseren Kugel mehr Licht reflectiren, als von der einer kleineren.

68.

*) Im Vorhergehenden haben wir nun die Principien mitgetheilt und zu erläutern gesucht, durch deren Vermittelung Leibnitz die eigentliche Infinitesimal-Rechnung erfand und begründete. Das erste Erforderniss war offenbar, die allgemeinen Regeln zu finden, nach welcher man von jeder Function, ($y = Fx$), das Differential ($dy = p \cdot dx$) angeben oder dieselbe differentiiren kann.

Da die Analysis, namentlich die Theorie der unendlichen Reihen schon bekannt war, so hätte man diese zunächst erforderlichen Differentialformeln auf dieselbe Weise ableiten können, wie die Grenzmethode es thut, jedoch etwas kürzer, weil ja nur das sogenannte nuendlich Kleine erster Ordnung in Betracht kommt. Die Differentiale der trigonometrischen Functionen konnte Leibnitz durch die Annahme, dass die Differentiale keine wirkliche (messbare) Grössen sind, sondern, als reine Gedankendinge, nur das Bestreben eine solche zu werden ausdrücken, und dass das Element einer krummen Linie (von aller angebbaren Quantität abstrahirt) als grade betrachtet werden muss, dnrch unmittelbare Betrachtung der Statt findenden Verhältnisse der Differentiale finden, wie folgende Beispiele zeigen.

69.



*) Sei für $CA = 1$, $\widehat{AM} = x$, $MP = y$, also erstens:

$$y = \sin x$$

Lassen wir nun die absolut veränderliche Grösse x nicht sprungweise, sondern, wie es der eigenthümliche Character der Infinitesimal-Rechnung (das Gesetz der Stetigkeit) immer fordert, stetig wachsen, d. h. in Gedanken in den unmittelbar folgenden Zustand kommen, so dass im characteristischen Dreieck vrM sofort $Mv = dx$ das Differential vom Bogen x und $vr = dy$ das Differential von y, d. h. von $\sin x$ ist, so hat man, weil $\widehat{vMr} = \widehat{CMP}$, $CP = \cos x$ und $\Delta vrM \backsim \Delta CMP$, ganz einfach $Mv : vr = CM : CP$, d. i. $dx : dy = 1 : \cos x$, woraus:

$$dy = \cos x \cdot dx$$

oder, weil $\hat{v} = \hat{C}$, trigonometrisch noch kürzer $vr = Mv \cdot \cos C$, d. i. $dy = \cos x dx$.

2. Um das Differential der Function:

$$y = \cos x$$

zu erhalten, wo also für $AM = x$, jetzt $CP = y$ und $Mr = -dy$ ist (§ 20, Amkg.), hat man trigonometrisch sogleich unmittelbar:

$$dy = -\sin x \cdot dx$$

3. Sei ferner:

$$y = \operatorname{tg} x$$

wo also jetzt $Mv = dx$, $AT = y$, $TH = dy$ ist.

Denkt man Tk concentrisch (parallel) mit Mv beschrieben und MP aufwärts verlängert, so bildet diese Verlängerung mit dem Element Mv einen Winkel, der den Winkeln bei T, v und C gleich ist. Da nun $CT = \frac{1}{\cos x}$ und (§ 67) $Mv : Tk = 1 : CT$, woraus: $Tk = CT \cdot dx = \frac{dx}{\cos x}$. Ferner $TH = \frac{Tk}{\cos x}$, d. i.

$$dy = \frac{dx}{\cos^2 x}$$

4. Es sei:

$$y = \text{arc}\sin x$$

also jetzt $\widehat{AM} = y$, $MP = x$, $CP = \sqrt{1-x^2}$, $vr = dx$, $Mv = dy$. Weil nun $\triangle Mvr \backsim \triangle CMP$, so ist $dy : dx = 1 : \sqrt{1-x^2}$, woraus:

$$dy = \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$$

5. Sei noch:

$$y = \text{arc}\,\text{tg}\, x$$

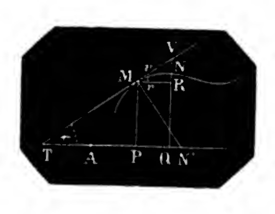
also jetzt $\widehat{AM} = y$, $AT = x$, $TH = dx$, $Mv = dy$, $CT = \sqrt{1+x^2}$. Da nun $Mv : Tk = 1 : CT$, so ist $Tk = dy \cdot \sqrt{1+x^2}$; ferner ist: $TH : Tk = CT : CA$, oder $dx : dy \cdot \sqrt{1+x^2} = \sqrt{1+x^2} : 1$, woraus:

$$dy = \frac{dx}{1+x^2}$$

70.

*) Nachdem nun die nöthigen Differentialformeln gefunden waren, um jede gesonderte Function differentiiren zu können, schritt Leibnitz jetzt zu den vielfachen Anwendungen der Infinitesimal-Rechnung und zwar zunächst zu dem, ihre Erfindung veranlassenden Problem der Tangentenziehung, welches er durch unmittelbare Betrachtung und Benutzung der Differentiale, welche nur als Hülfsgrössen auftreten und immer wieder aus den durch sie gewonnenen Resultaten eliminirt werden, auf folgende Weise ganz einfach lös'te.

Da die durch M gedachte Berührungslinie Tv wenigstens zwei Elemente mit der krummen Linie $y = F(x)$ gemeinsam hat (§ 63, 2) und also das characteristische Dreieck vrM mit dem Dreieck MPT ähnlich und $vMr = \tau$ ist, so hat man für den durch seine Coordinaten bestimmten Punct M zur Berechnung des Berührungswinkels τ unmittelbar $\text{tg}\,\tau = \frac{vr}{Mr}$ oder gleich:



$$\text{tg}\,\tau = \frac{dy}{dx}; \qquad \cot\tau = \frac{dx}{dy}$$

oder auch, wenn man das Element oder Differential Mv der

krummen Linie mit ds bezeichnet und beachtet, dass in formeller Hinsicht $ds^2 = dx^2 + dy^2 = \left(1 + \frac{dy^2}{dx^2}\right) dx^2$, also $ds = \sqrt{1 + \frac{dy^2}{dx^2}} . dx$ ist (§§ 51, 65):

$$\sin \tau = \frac{dy}{ds}; \qquad \cos \tau = \frac{dx}{ds}$$

Zur Bestimmung der Subtangente hat Leibnitz ganz einfach: $S_t : y = dx : dy$, woraus:

$$S_t = y \cdot \frac{dx}{dy}$$

und weil $\triangle v M r \backsim \triangle N'MP$, für die Subnormale: $S_n : y = dy : dx$, woraus:

$$S_n = y \cdot \frac{dy}{dx}$$

71.

*) Die Infinitesimalgrössen (Differentiale) gebraucht Leibnitz also nur einfach als Hülfsgrössen, um die Rechnung einzuleiten. Sie kommen, als solche, immer nur in den allgemeinen Formeln vor. Ist für eine specielle Anwendung derselben die Function veränderlicher Grössen gegeben, so kann man sie differentiiren, darauf die Differentiale aus den allgemeinen Formeln eliminiren und hat es dann nur noch mit endlichen Grössen zu thun.

Der Grund, dass diese Methode hier wieder auf dieselben Resultate führt und führen muss, wie die nach der Grenzmethode gefundenen, liegt offenbar darin, dass Leibnitz das Element (Differential) eines Bogens als grade betrachtet, und die Uebereinstimmung der Resultate spricht für die Richtigkeit der Leibnitz'schen Annahme.

Die Infinitesimalmethode ist, wie man sieht, sehr subtil, aber richtig. Sollte dies aus dem Bisherigen und noch Folgenden nicht einleuchten, so liegt dies nur an unserer mangelhaften Darstellung derselben.

Viele, welchen diese Sache zu metaphysischer Natur erscheint, gleichwohl aber die grössere Kürze und Fruchtbarkeit, welche die Infinitesimalmethode vor der schwerfälligen Grenzmethode hat, nicht fahren lassen wollen, geben den Wink, sie immerhin als Erfindungsmittel zu benutzen und die durch sie gewonnenen Resultate hinterher nach der Grenzmethode zu prüfen, was

allerdings geschehen kann. Leibnitz will aber von dieser Controle nichts wissen. Er legt vielmehr grade Gewicht auf seine Methode, die er, vorsichtig und richtig angewandt, für vollkommen richtig und für besser hält, indem die unmittelbare Betrachtung und Erkennung der Differentialverhältnisse den erfindenden Gedankengang fördert und abkürzt, wie wir schon § 69 und 70 an ein paar Beispielen gesehen haben. In der unmittelbaren Erkennung oder Auffindung des Verhältnisses unendlich kleiner Grössen liegt eigentlich die Kraft und der eigentliche Geist der Infinitesimal-Rechnung; denn bei den meisten Anwendungen derselben, namentlich auf Mechanik und Physik, kommen Fälle vor, wo man gar nicht aus bekannten Functionen veränderlicher Grössen die entsprechenden Differential-Verhältnisse (durch Differentiiren), sondern grade umgekehrt, aus unmittelbar (ohne Rechnung) zu erkennenden Differentialen oder auch Differential-Verhältnissen die entsprechende Function (durch Integriren) zu finden sucht. Aus diesem Grunde ist die Leibnitz'sche Methode die natürlichste und beste.

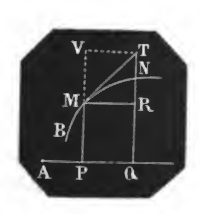
72.

*) Nachdem wir nun die ursprünglichen Vorstellungen Leibnitzens, des Erfinders der Differential-Rechnung (1684) mitgetheilt haben, bleibt uns noch übrig, auch einiges über die von Newton etwas früher erfundene, aber später veröffentlichte Fluxions-Rechnung (1687) zu erwähnen, um so mehr, als unsers Wissens weder ein deutsches noch französiches Lehrbuch dieselbe auch nur erwähnt.

Newton betrachtet nämlich alle Arten Grössen als durch stetige Bewegung (Flux) erzeugt. Eine Linie z. B. durch die Bewegung eines Punctes, eine Fläche durch die Bewegung einer Linie etc. Jede so erzeugte Grösse heisst eine variable oder fliessende Grösse (Fluente). Die Geschwindigkeit, mit welcher eine Linie fliesst, ist dieselbe, als die Geschwindigkeit des sie beschreibenden Punctes. Die Geschwindigkeit, mit welcher eine Fläche fliesst, ist dieselbe, als die der sie erzeugenden Linie etc. Jede stetige Function zweier veränderlichen Grössen, $y = F(x)$, kann man nun immer durch eine Linie dargestellt und die Linie selbst durch die Bewegung eines Punctes beschrieben denken. Die Vorstellung der Bewegung ruft dann aber zugleich auch die beiden anderen damit verbundenen, nicht in die reine

Mathematik gehörenden Vorstellungen von Zeit und Geschwindigkeit hervor.

Man stelle sich nun vor, die (verlängerte) Ordinate MP bewege sich parallel mit sich selbst und gleichförmig an die Abscissenlinie hin, während sich zugleich ein Punct, M, in dieser Ordinate mit einer durch die Gleichung $y = F(x)$ vorgeschriebenen Geschwindigkeit bewegt. Dem die Linie beschreibenden Punct M legt man also zweierlei Bewegungen bei, eine nach der Abscissenrichtung, welche immer gleichförmig, sonst aber von beliebiger Geschwindigkeit ist, und eine nach der Ordinatenrichtung. Ist die gegebene Gleichung $y = F(x)$ vom ersten Grade, $y = ax + b$, so ist offenbar $\Delta y = a \cdot \Delta x$ und das Wachsthum der Ordinate der Zunahme (Abnahme) der Abscisse stets proportional, der Punct M beschreibt eine grade Linie, seine Bewegung in der Ordinatenrichtung ist dann ebenfalls eine gleichförmige, mithin sein Bewegungsbestreben, d. i. seine Geschwindigkeit in der Ordinatenrichtung, constant (§ 47). Ist aber die Gleichung $y = F(x)$ nicht vom ersten Grade, so ist auch die Bewegung des Punctes M in der Ordinatenrichtung (aufwärts oder abwärts) keine gleichförmige, sondern accelerirend oder retardirend, je nachdem in der Differenz $\Delta y = p\Delta x + M\Delta x^2 + \ldots\ldots$ das zweite Glied $M\Delta x^2$ mit dem erstern $p\Delta x$ einstimmig ist, oder nicht (§ 47).



Die Geschwindigkeit, mit welcher die Ordinate fliesst, ist hier also von Punct zu Punct veränderlich. Die augenblickliche Richtung des die krumme Linie beschreibenden Punctes M ist die der Tangente MT.

Der Erste, der ein vollständiges Lehrbuch der Fluxions-Rechnung geschrieben hat, Maclaurin, nimmt nun an (um unendlich kleine Grössen zu vermeiden), die Abscisse AP fliesse mit beständiger Geschwindigkeit, und nennt den Weg MR, welchen der Punct M nach der Abscissenrichtung in einer beliebigen Zeit-Einheit beschreiben würde, und der also zugleich die Geschwindigkeit in der Abscissenrichtung darstellt, die Fluxion der Abscisse. Unter Fluxion der Ordinate ist dann aber der Weg MV = RT gemeint, den der Punct in der Ordinatenrichtung in derselben Zeit durchlaufen würde, wenn seine Geschwindigkeit (Bewegungsbestreben) dieselbe bliebe, welche er augenblicklich im Puncte M hatte, so dass also, statt

eines Bogens MN, in derselben Zeit eine grade Linie, MT, beschrieben würde, welche die Fluxion des Bogens BM heisst.

Diese Fluxionen, deren absolute Grösse unbestimmt bleiben kann, haben offenbar dasselbe Verhältniss zu einander, wie in ihrem verschwindenden Zustande, und stimmen also völlig mit dem überein, was im § 13 Differentiale genannt worden, auch ist die Rechnung mit ihnen ganz dieselbe, wie mit den Differentialen, nur die Bezeichnung ist anders. Die auf einander folgenden Fluxionen von y werden nämlich, statt mit dy, d^2y,.... mit $\dot{y}$, $\ddot{y}$,.... bezeichnet. Wäre z. B. $y = x^5$, so ist: $\dot{y} = 5x^4 \cdot \dot{x}$. Nimmt man von dieser ersten Fluxion wiederum die Fluxion, so ist: $\ddot{y} = 20x^3 \cdot \dot{x}^2$, dann $\dddot{y} = 60x^2 \cdot \dot{x}^3$, dann $\ddddot{y} = 120x \cdot \dot{x}^4$ etc. $\frac{\dot{y}}{\dot{x}} = 5x^4$; $\frac{\ddot{y}}{\dot{x}^2} = 20x^3$ etc.

Maclaurin sagt*) (pag. 420): „Sir Isaac Newton habe, um die Annahme unendlich kleiner Grössen zu vermeiden, die gleichzeitigen Incremente (Δx, Δy, Δs) der fliessenden Grössen als endlich betrachtet und dann die Grenze des veränderlichen Verhältnisses untersucht, welches diese Incremente noch zu einander haben, indem er sie bis zum Verschwinden abnehmen lässt, welches Verhältniss dann dasselbe ist, wie das der Fluxionen.“ Dies stimmt aber nicht mit Newton's Ausspruch: man solle sich die Incremente nicht vor und auch nicht nach, sondern im Augenblick des Verschwindens denken, wodurch, wie uns scheint, die Leibnitz'sche Vorstellung der Infinitesimalgrössen wieder erweckt wird.**) Auch giebt Maclaurin (pag. 414) zu: „dass

---

*) A Treatise of fluxions by Colin Maclaurin. Edinburgh 1742.

**) Dieser Meinung muss auch wohl Thom. Simpson gewesen sein, der deshalb, um jede metaphysische Schwierigkeit zu vermeiden, in seiner »doctrine of fluxions« von den ursprünglichen Newton'schen Vorstellungen absichtlich abweicht. (By taking fluxions as meer velocities, the imagination is confined, as it were, to a point, and without proper care, insensibly involv'd in metaphysical difficulties.)

Ob man, wie Leibnitz, Poisson, Herbart u. A., das unendlich Kleine ernstlich für ein wirklich untheilbares Element oder wie andere, und um dadurch, wie man meint, jede metaphysische Schwierigkeit zu beseitigen, nur für eine nützliche Fiction nehmen will, um bequem und schnell die Rechnung einzuleiten, ist für die Rechnung selbst gleichgültig, da ja das Eine wie das Andere zum Ziele führt.

die Schlüsse nach der Infinitesimalmethode vollkommen wahr (accurately true) sind und mit denen, worauf die Methode der Fluxionen führt, genau übereinstimmen (agree precisely)."

73.

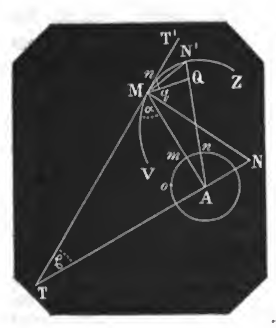
2. Polar-Gleichungen.

Es sei $r = f(\theta)$ die Gleichung einer auf Polarcoordinaten bezogenen krummen Linie, VZ ein Stück derselben, so ist dadurch für jeden auf dem, mit dem Radius = 1 beschriebenen Abscissen-Kreis abgesteckten Bogen $\widehat{om} = \theta$, der zugehörige Radius vector $AM = r$, mithin die Lage des Punctes M bestimmt. (Höhere Geometrie Pag. 17.)

Denkt man sich durch diesen bestimmten Punct M eine Berührungslinie gezogen und dieselbe bis an die, auf dem Radius vector errichteten Senkrechten TN verlängert, so heisst hier für den Punct M, MT die Tangente, AT die Subtangente und MN senkrecht auf MT die Normale und AN die Subnormale.

74.

Aufgabe. Allgemeine Formeln anzugeben, nach welchen man die eben erklärten vier Linien in jedem besonderen Falle, wo $r = f(\theta)$ gegeben ist, berechnen kann.



Auflösung 1. Um zuerst den Winkel α oder β zu finden, welchen die Tangente mit dem Radius vector oder mit der Subtangente macht, lasse man den Bogen $\widehat{om} = \theta$ um das Stück $\widehat{mn} = \Delta\theta$ wachsen, so wird auch der Radius vector $AM = r$ sich um ein Stück, $N'Q = \Delta r$, ändern, welches graphisch dargestellt ist, indem man aus A mit AM den Kreisbogen MQ beschreibt.

Aus der gegebenen Gleichung $r = f(\theta)$ folgt nun: $r + \Delta r = f(\theta + \Delta\theta)$ oder:

$$r + \Delta r = f(\theta) + \frac{dr}{d\theta} \cdot \Delta\theta + \mathrm{M} \cdot \Delta\theta^2 + \ldots$$

$$\Delta r = \frac{dr}{d\theta} \cdot \Delta\theta + \mathrm{M} \cdot \Delta\theta^2 + \ldots .$$

Ist nun $\widehat{mn} = \Delta\theta$, so ist $\widehat{\mathrm{MQ}} = r.\Delta\theta$. Dividirt man nun letztere Gleichung beiderseits durch $r \cdot \Delta\theta$, so erhält man $\frac{\mathrm{N'Q}}{\mathrm{MQ}}$, nämlich:

$$\frac{\Delta r}{r\Delta\theta} = \frac{dr}{rd\theta} + \frac{\mathrm{M} \cdot \Delta\theta}{r} + \ldots .$$

Denkt man sich den Bogen MQ sehr klein, so würde der Quotient $\frac{\mathrm{N'Q}}{\mathrm{MQ}}$ näherungsweise gleich der trigonometrischen Tangente des Winkels β sein. Um aber diese trigonometrische Tangente ganz genau zu erhalten, müssen wir $\Delta\theta$ bis zu Null abnehmen lassen, alsdann fallen rechter Hand in letzterer Gleichung alle Glieder bis auf das erste weg und wir erhalten durch gleiche Schlüsse wie in § 8:

$$\operatorname{tg} \beta = \frac{dr}{rd\theta}; \qquad \operatorname{tg} \alpha = \frac{rd\theta}{dr};$$

$$\mathrm{S}_t = r^2 \frac{d\theta}{dr}; \qquad \mathrm{T} = r\sqrt{\left(1 + r^2 \frac{d\theta^2}{dr^2}\right)};$$

$$\mathrm{S}_n = \frac{dr}{d\theta}; \qquad \mathrm{N} = \sqrt{\left(r^2 + \frac{dr^2}{d\theta^2}\right)}.$$

*) Auflösung 2. Die Infinitesimalmethode macht weniger Umstände. Hiernach ist das Differential des Bogens $\widehat{om}, = d\theta$, der Bogen $\mathrm{MQ} = rd\theta$. (§ 67). Aus dem bei q rechtwinkligen verschwindenden (characteristischen) Dreiecke hat man unmittelbar: $\operatorname{tg} \alpha = \frac{rd\theta}{dr}$; $\mathrm{S}_t : r = rd\theta : dr$, woraus: $\mathrm{S}_t = r^2 \frac{d\theta}{dr}$ etc.

Beispiel, 1. Für die Archimedäische Spirale hat man (höh. Geom. § 96):

$$r = \frac{a}{2\pi} \cdot \theta$$

$$\frac{dr}{d\theta} = \frac{a}{2\pi}; \qquad \frac{d\theta}{dr} = \frac{2\pi}{a}$$

Es ist also hier nach den vorhin entwickelten allgemeinen Formeln:

$$\operatorname{tg} \alpha = r \frac{d\theta}{dr} = \frac{a}{2\pi} \theta \cdot \frac{2\pi}{a} = \theta$$

Die Tangente des immer grösser werdenden Winkels, den die Berührungslinie mit dem Radius vector macht, ist also immer gleich dem Polarwinkel θ. Für $\theta = \infty$ steht die Tangente senkrecht auf dem Radius vector. Ferner hat man:

$$S_t = r^2 \frac{d\theta}{dr} = \frac{a}{2\pi} \cdot \theta^2$$

$$S_n = \frac{dr}{d\theta} = \frac{a}{2\pi}$$

$$T = r \sqrt{1 + r^2 \left(\frac{d\theta}{dr}\right)^2} = \frac{a}{2\pi} \theta \sqrt{1 + \theta^2}$$

$$N = \sqrt{r^2 + \left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2} = \frac{a}{2\pi} \sqrt{1 + \theta^2}.$$

Die Subnormale ist also constant, wie bei der Parabel.

Beispiel 2. Für die Exponential-Spirale hat man:

$$r = e^\theta;$$

$$\frac{dr}{d\theta} = e^\theta = r; \qquad \frac{d\theta}{dr} = \frac{1}{e^\theta} = \frac{1}{r}$$

$$\operatorname{tg} \alpha = r \frac{d\theta}{dr} = 1.$$

Die Tangente bildet also in jedem Punct mit dem Radius vector immer denselben Winkel $\alpha = 45^0$. Auf diese Eigenschaft gründete H. Steinheil die Erfindung seines ingenieusen Wurfgeschützes, mit welchem er accurate Namenzüge durch eine tannene Blende schoss. Ferner ist

$$S_t = e^\theta = r; \qquad T = r\sqrt{2};$$

$$S_n = e^\theta = r; \qquad N = r\sqrt{2};$$

Es sind also S_t und S_n und ebenso T und N immer gleich gross.

Asymptoten.

75.

In der analytischen Geometrie (§§ 55, 56) ist schon der sehr merkwürdige Umstand besprochen, dass es ins Unendliche laufende krumme Linien giebt, die sich einer endlosen graden Linie, Asymptote genannt, immerfort nähern, ohne sie jedoch je völlig zu erreichen. Auch ist daselbst bei der Hyperbel nachgewiesen, dass die Asymptote einer krummen Linie, wie unendlich nahe sie ihr auch kommen möge, doch nicht (wie Viele behaupten) als eine Berührungslinie derselben betrachtet werden darf, welche im Unendlichen einen Punct mit der krummen Linie gemein hätte, weil dies ja einen Widerspruch enthalten würde, indem die Gemeinschaft eines solchen Punctes das vermeinte Unendliche zugleich wieder zu einem Endlichen (Begrenzten, Vollendeten) machen würde. Die Unendlichkeit ist ein Prädicat für Gedankendinge, mit deren Construction wir niemals fertig werden.

Gauss sagt: „Der Gebrauch einer unendlichen Grösse, als einer Vollendeten, ist in der Mathematik niemals erlaubt. Das Unendliche ist nur eine façon de parler, indem man eigentlich von Grenzen spricht, denen gewisse Verhältnisse so nahe kommen, als man will, während anderen ohne Einschränkung zu wachsen verstattet ist. Hierin ist aber nichts Widersprechendes, wenn der endliche Mensch sich nicht vermisst, etwas Unendliches, als etwas Gegebenes und von ihm mit seiner gewohnten Anschauung zu Umspannendes betrachten zu wollen." *)

Genau betrachtet ist es die flüchtige Phantasie, welche uns augenblicklich eine Pforte zum Eingang ins Unendliche vorgaukelt, die aber, sobald wir in unvollendeten und unklaren Gedanken angelangt zu sein wähnen, sofort wieder in endlosem Nebel verschwindet. „L'infini est le gouffre où se perdent nos pensées."

76.

Denken wir uns z. B. die discontinuirliche Linie construirt, die aus der Function:

*) Briefwechsel zwischen Gauss und Schumacher, herausgegeben von C. A. F. Peters.

$$y = \frac{a}{x^2}$$

entspringt, so ist klar, dass man für jedes $\pm x$ gleiche positive Ordinaten erhält, die mit immerfort wachsenden $\pm x$ kleiner werden, als jede angebbare Grösse. Die Achse der $\pm x$ ist hier also eine Grenze, welcher die ihr zugekehrten Aeste der krummen Linie so nahe kommen, als man will, sie deshalb aber selbst im Unendlichen (in der andern Welt) nie völlig erreichen, weil die Ordinaten nie absolut Null werden, weil dies ja gleichbedeutend wäre, die Grösse a durch Theilung ganz zu vernichten. Setzt man also, um in der üblichen Bildersprache zu schreiben, $x = \pm \infty$, so wird $\frac{a}{\infty^2}$ nicht absolut Null, sondern eine Infinitesimalgrösse. Die Achse der x ist daher keine Berührungslinie, sondern eine Asymptote.

So lange in $y = \frac{a}{x^2}$, das x noch einen endlichen, wenn auch noch so grossen Werth hat, hat auch die Potentiirung, oder der Exponent 2, einen Sinn. Das Symbol $\frac{a}{\infty^2}$ aber drückt eine unmögliche Operation aus, indem es ungereimt ist, eine unendliche (unvollendete) Grösse potentiiren zu wollen. Deshalb sind auch die Ausdrücke: unendlich grosse Grössen höherer, 2ter, 3ter .... Ordnung blosse Redensarten und ihre Bezeichnungen ∞^2, ∞^3,... ein blosses Zeichenspiel, nur rein formell, welches jedoch, bei gehöriger Aufmerksamkeit, nie auf Irrthümer führen kann, indem man in kritischen Fällen, statt ∞, $\frac{1}{\infty}$ nur sehr grosse und sehr kleine bestimmte Zahlen zu setzen braucht.

Nehmen wir in $y = \frac{a}{x^2}$, die Abscisse $x = \pm 1$, so erhält man die Ordinaten $y = a$. Lassen wir nun $\pm x$ immerfort kleiner werden, so wachsen die Ordinaten ins Unendliche und überschreiten also jede noch so grosse angebbare Zahl. Dass aber auch die Achse der y keine Berührungslinie, sondern eine wirkliche Asymptote ist und folglich kein Punct der krummen Linie in die Achse selbst fällt, mithin auch beide Aeste niemals zusammenstossen, folgt aus dem vorhergehenden Raisonnement (§ 75) und auch aus der Gleichung $y = \frac{a}{x^2}$, die man auch so

schreiben kann: $x = \pm\sqrt{\frac{a}{y}}$ (anal. Geom. § 67, b), und woraus man sieht, dass für $y = \infty$, die Abscisse x nicht absolut Null, sondern eine Infinitesimalgrösse wird.

Setzt man in $y = \frac{a}{x^2}$ die Abscisse $x = 0$, so wird formell $y = \frac{a}{0}$. Dies Symbol darf aber hier nicht als eine wirkliche Ordinate der krummen Linie angesehen werden, welche auf der Achse der y abzustecken wäre, sondern als eine nie zu erreichende Grenze der Tangenten, welche an die krumme Linie gezogen werden können. Ueberdies hat es keinen Sinn, eine Grösse, a, durch eine absolute Null zu dividiren, weil selbst in einer unendlichen Einbildungskraft kein Quotient entspringen kann, der mit der absoluten Null multiplicirt, die Grösse a wieder gäbe. Es deutet also hier das Zeichen $\frac{a}{0} = \infty$, oder, indem man statt der Null besser eine Infinitesimalgrösse setzt, $\frac{a}{(\pm dx)^2}$ an, dass die krumme Linie längs der positiven Ordinatenachse, zu beiden Seiten derselben, ohne Ende fortläuft.

77.

Die discontinuirliche Linie, deren Gleichung $y = \frac{a}{x^4}$ ist, hat offenbar dieselben Asymptoten, wie die, deren Gleichung $y = \frac{a}{x^2}$. Erstere nähert sich aber für $x > 1$ der Abscissenachse viel rascher, und für $x < 1$ der Ordinatenachse viel langsamer, als letztere. Dies ist die einzige Deutung der Symbole $\frac{a}{\infty}$, $\frac{a}{\infty^2}$, $\frac{a}{\infty^3}$ etc., so wie, wenn dx eine Infinitesimalgrösse bedeutet: $\frac{a}{dx} = \infty$, $\frac{a}{dx^2} = \infty^2$ etc.

Anmerkung. Man kommt bei diesen Betrachtungen unwillkürlich auf die Vorstellung, dass krumme Linien mit unendlichen Schenkeln in grade Linien ausarten können, und dann, wenn sie zugleich Asymptoten haben, in einem untheilbaren Abstande mit denselben parallel laufen. Dieser merkwürdige Umstand ist es eben, welcher Gauss zu der Behauptung berechtigte, dass in

der Euklidischen Geometrie ein vollkommen strenger Beweis über den Parallelismus gar nicht möglich ist.

78.

Die Function $xy - ay - bx = 0$, woraus:

$$y = \frac{bx}{x - a}$$

giebt für $x = a \pm dx$, $y = \frac{ab \pm b \cdot dx}{\pm dx} = \frac{ab}{\pm dx} = \pm \infty$; und für $x = \pm \infty$, $y = \frac{b}{1 - \frac{a}{\pm \infty}} = b$. Die ihr entsprechende krumme Linie hat also zwei Asymptoten, wovon die eine, im Abstande $= a$, mit der ganzen Ordinatenachse, und die andere, in dem Abstande $= b$, mit der ganzen Abscissenachse parallel geht; auch weisen die Vorzeichen $\pm$ zugleich noch nach, an welcher Seite die beiden getrennten Zweige der krummen Linie liegen.

Die obige Function, auf x reducirt, giebt:

$$x = \frac{ay}{y - b}$$

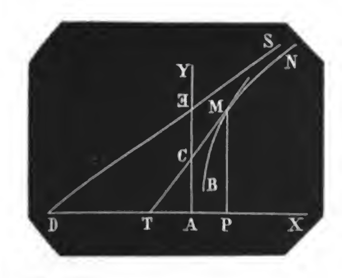
und für $y = b \pm dy$, $x = \frac{ab \pm ady}{\pm dy} = \frac{ab}{\pm dy} = \pm \infty$; ferner für $y = \pm \infty$, $x = \frac{a}{1 - \frac{b}{\infty}} = a$, mithin dieselben Asymptoten.

79.

Sind also die etwaigen Asymptoten einer krummen Linie die Achsen selbst, oder laufen sie mit denselben in bestimmten Abständen parallel, so sind dieselben, wie in den vorhergehenden Beispielen gezeigt, leicht zu finden. In diesem Falle ist nämlich $y = \infty$ für $x = 0$, oder $x = a$, und $x = \infty$ für $y = 0$, oder $y = b$.

Haben die Asymptoten aber andere Lagen, so ist es in der Regel am besten, sie nach folgender, ganz allgemeiner Methode zu bestimmen.

Angenommen, es sei BMN ein Stück einer krummen Linie, deren Gleichung $y = F(x)$, und DS ihre etwaige Asymptote, D und E ihre zu findenden Durchschnittspuncte mit den Coordinatenachsen.



Denkt man sich durch einen Punct, $M(x,y)$, eine Berührungslinie, MT, gezogen und dann den Berührungspunct M immer weiter über N hinaus gerückt, so werden auch die Durchschnittspuncte T und C immer näher an D und E rücken, ohne sie für $x=\infty$ überschreiten, ja selbst nicht erreichen zu können.

Man hat also nur die beiden Linien AT und AC als Functionen von x auszudrücken und zuzusehen, ob diese Linien für $x=\infty$ (vorausgesetzt, dass y nicht imaginair wird) endlich bleiben oder unendlich werden. Im ersteren Fall giebt es eine Asymptote, im anderen Fall keine. Wird die eine Linie endlich, die andere unendlich, so geht die Asymptote mit der einen Coordinaten-Achse parallel. Werden beide Linien, für $x=\infty$, gleichzeitig Null, so geht die Asymptote durch den Anfangspunct. Da aber dieser Eine Punct die Lage derselben nicht bestimmt, so muss man in diesem Falle die Grenze des Berührungswinkels τ (nämlich $\operatorname{tg}\tau=\frac{dy}{dx}$) suchen. Weil wir in der Figur AT negativ und AC positiv angenommen, und also $AT=x-S_t$ und $AC=-AT\cdot\frac{dy}{dx}$, so hat man (§ 49):

$$AT=x-y\frac{dx}{dy}\dots\dots\dots\dots\dots\dots(1)$$

$$AC=y-x\cdot\frac{dy}{dx}\dots\dots\dots\dots\dots(2)$$

Hierin sind y und $\frac{dy}{dx}$ Functionen von x. Substituirt man diese Functionen und setzt dann $x=\infty$, so findet man die Grenzwerthe von AT und AC.

Beispiel 1. Es sei die Gleichung der krummen Linie

$$y=\frac{b}{a}\sqrt{x^2-a^2}$$

so ist hier: $\frac{dy}{dx} = \frac{b}{a} \cdot \frac{x}{\sqrt{x^2 - a^2}}$, mithin:

$$\text{AT} = \frac{x^2 - a^2}{x} - x = -\frac{a^2}{x}$$

$$\text{AC} = \frac{b}{a}\sqrt{x^2 - a^2} - \frac{b}{a} \cdot \frac{x^2}{\sqrt{x^2 - a^2}} = -\frac{ab}{\sqrt{x^2 - a^2}}$$

Beide Linien werden für $x = \infty$ gleichzeitig Null. Die Asymptote geht also durch den Anfangspunct.

Aus $\operatorname{tg} \tau = \frac{b}{a} \cdot \frac{x}{\sqrt{x^2 - a^2}} = \frac{b}{a} \cdot \frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{a}{x}\right)^2}}$ folgt aber, für $x = \infty$ und mit Berücksichtigung des doppelten Vorzeichens $\operatorname{tg} \tau = \pm \frac{b}{a}$, wodurch die Lagen beider Asymptoten bestimmt sind.

Beispiel 2. Es sei die Gleichung der krummen Linie:

$$y = x + \frac{a^2}{x} + 2a$$

so ist: $\frac{dy}{dx} = 1 - \frac{a^2}{x^2} = \frac{x^2 - a^2}{x^2}$ und $\frac{dx}{dy} = \frac{x^2}{x^2 - a^2}$

$$\text{AT} = \frac{2ax}{a - x} = \frac{2a}{\frac{a}{x} - 1}; \quad \text{AC} = \frac{2a^2}{x} + 2a$$

Für $x = \infty$ ist: $\text{AT} = -2a$ und $\text{AC} = 2a$.

Für $x = \pm dx$ ist $y = \pm \infty$, $\text{AT} = 0$, $\text{AC} = \pm \infty$.

Um also keine Asymptote zu verfehlen, muss man auch $y = \infty$ setzen.

Viertes Buch.

Bestimmung des wahren Werthes einer Function von der unbestimmten Form:

$\frac{0}{0}$, $\frac{\infty}{\infty}$, $0 \cdot \infty$, 0^0, ∞^0, 1^∞, $\infty - \infty$.

80.

Eine gebrochene Function kann für einen besondern Werth der veränderlichen Grösse auf die Form $\frac{0}{0}$ führen, die man nicht als bedeutungslos übersehen, sondern deren wahren Werth bestimmen muss.

Construiren wir z. B. die Function:

$$y = \frac{x^3 - 8}{2(x-2)};$$

so hat man für $x = 0, 1, 2, 3, \ldots\ldots$
$y = 2, 3\tfrac{1}{2}, \frac{0}{0}, 9\tfrac{1}{2}, \ldots$

Ausgenommen für $x = 2$, erhält man für jeden andern positiven oder negativen Werth von x einen bestimmten Werth für y. Es drängt sich deshalb der Gedanke auf, dass, weil die Puncte für Abscissen, so nahe an 2 als man will, stetig auf einander folgen, auch für die Abscisse $x = 2$, die Ordinate $y = \frac{0}{0}$ einen bestimmten Werth haben und die gebrochene Function $\frac{x^3 - 8}{2(x-2)}$ stetig sein muss. Dass sie es wirklich ist, ergiebt sich, wenn man Zähler und Nenner durch $x - 2$ dividirt. Dann hat man $\frac{x^3 - 8}{2(x-2)} = \frac{x^2 + 2x + 4}{2}$, und da nun beide, nur an Form verschiedene Ausdrücke für jedes bestimmte x einerlei Werth haben müssen, so muss auch für $x = 2$, $\frac{0}{0} = 6$ sein.

Dasselbe findet man auch durch Benutzung der Infinitesimalgrössen. Setzen wir nämlich, um beiderseits unendlich nahe an den Punct der krummen Linie zu kommen, dessen Abscisse $x = 2$ ist, $2 \pm dx$ statt 2, so ist, weil höhere Potenzen von dx gegen niedrigere wegfallen, $\frac{(2 \pm dx)^3 - 8}{2(2 \pm dx - 2)} = \frac{\pm 12 \cdot dx}{\pm 2 \cdot dx} = + 6$. Der Quotient ist eine endliche Grösse und hat nur ein Vorzeichen, als Beweis, dass die Function $\frac{x^3 - 8}{2(x-2)}$ continuirlich und für $x = 2$, die Ordinate $\frac{0}{0} = + 6$ ist.

Die gebrochene Function $\frac{\sin x}{x^2}$ dagegen, welche für $x = 0$ ebenfalls auf das algorithmische Symbol $\frac{0}{0}$ führt, erkennt man auf den ersten Blick als eine discontinuirliche. Denn denkt man sich für x sehr kleine, der Null immer näher kommende, sowohl positive als auch negative Brüche gesetzt, so leuchtet ein, dass der Quotient, sowohl im positiven als negativen Sinne über alle Grenzen wächst, und dass also für $x = 0$ der Bruch $\frac{\sin x}{x^2} = \frac{0}{0} = \pm \infty$.

Die ganze Ordinatenachse der Linie $y = \frac{\sin x}{x^2}$ ist eine Asymptote. Die Abscissenachse wird nach beiden Seiten hin unzählige mal durchschnitten, weil der Zähler $\sin x$ für wachsende $\pm x$ abwechselnd positiv und negativ und Null ist.

Setzen wir in $\frac{\sin x}{x^2}$, um unendlich nahe an den Punct zu kommen, dessen Abscisse x, $= 0$ ist, $\pm dx$ statt 0 und bedenken, dass $\sin dx = dx$, so ist hier für $x = 0$, $\frac{\sin x}{x^2} = \frac{0}{0} = \frac{\pm dx}{dx^2} = \frac{\pm 1}{dx} = \pm \infty$.

Ferner ist für $x = 0$, $\frac{\sin x}{x^3} = \frac{0}{0} = \frac{\pm dx}{\pm dx^3} = \infty^2$ etc. (§ 75.)

Man kann auch die Lehren der Analysis zu Hülfe nehmen. So ist z. B. (Analysis § 80):

$$\frac{\sin x}{x^2} = \frac{x - \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{120}x^5 - \cdots}{x^2} = \frac{1 - \frac{1}{6}x^2 + \frac{1}{120}x^4 - \cdots}{x}$$

Lässt man nun, sowohl von positiver als auch negativer Seite her, x, $= 0$ werden, oder setzt statt x die Infinitesimalgrösse $\pm dx$, so hat man wieder $\frac{\sin x}{x^2} = \pm \infty$ für $x = 0$.

Die Ursache, weshalb eine gebrochenene Function, $\frac{F(x)}{f(x)}$, für einen gewissen Werth von x auf die unbestimmte Form $\frac{0}{0}$ führen kann, liegt also offenbar darin, weil Zähler und Nenner einen Factor gemein haben, der für diesen Werth von x verschwindet.

Obgleich nun, so wie in vorhergehenden Beispielen, auch in anderen Fällen, wo eine gebrochene Function, $\frac{F(x)}{f(x)}$, für einen besondern Werth von x, den wir mit x_0 bezeichnen wollen, auf die Form $\frac{0}{0}$ führt, der gemeinschaftliche Factor von $F(x)$ und $f(x)$ sich immer nach den Lehren der Analysis entfernen, und der wahre Werth von $\frac{F(x_0)}{f(x_0)} = \frac{0}{0}$ bestimmen lässt, so geschieht dies doch in vielen Fällen leichter durch Differential-Rechnung, wie der folgende § zeigen wird.

81.

Setzen wir in der gebrochenen Function $\frac{F(x)}{f(x)}$, welche für $x = x_0$ auf $\frac{0}{0}$ führt, $x_0 + h$ statt x_0 und entwickeln sowohl Zähler als Nenner, jeden besonders, nach dem Taylor'schen Lehrsatz (§ 46), so ist:

$$\frac{F(x_0+h)}{f(x_0+h)} = \frac{F(x_0)+F'(x_0)\cdot h+\frac{1}{2}F''(x_0)\cdot h^2+\ldots.}{f(x_0)+f'(x_0).h+\frac{1}{2}f''(x_0)\cdot h^2+\ldots.}$$

oder weil rechter Hand im Zähler und Nenner $F(x_0)$ und $f(x_0)$ Null sind, nach Weglassung derselben und darauf folgenden Abkürzung durch h:

$$\frac{F(x_0+h)}{f(x_0+h)} = \frac{F'(x_0)+\frac{1}{2}F''(x_0)\cdot h+\ldots}{f'(x_0)+\frac{1}{2}f''(x_0)\cdot h+\ldots}$$

Setzt man nun beiderseits $h = 0$, oder $h =$ einer Infinitesimalgrösse, so ist auch:

$$\frac{F(x_0)}{f(x_0)} = \frac{0}{0} = \frac{F'(x_0)}{f'(x_0)}$$

d. h. also, wenn eine gebrochene Function, $\frac{F(x)}{f(x)}$, für einen besondern Werth von $x = x_0$ auf den unbestimmten (vieldeutigen) Ausdruck $\frac{0}{0}$ führt, so findet man den wahren Werth desselben,

indem man ganz einfach Zähler und Nenner des Bruches $\frac{F(x)}{f(x)}$, jeden besonders, differentiirt und durch dx dividirt, alsdann in $\frac{F'(x)}{f'(x)}$ für x wieder denselben Werth x_0 substituirt. Sollte auch $\frac{F'(x_0)}{f'(x_0)}$ wieder auf $\frac{0}{0}$ führen, so muss man diese Operation wiederholen und Zähler und Nenner der Function $\frac{F'(x)}{f'(x)}$ auf's Neue differentiiren etc. Dies folgt auch aus der obigen Entwickelung (1), wo dann im Zähler und Nenner die beiden ersten Glieder verschwinden. Dividirt man darauf durch $\frac{1}{2}h^2$, und setzt $h = 0$, so ist in diesem Fall $\frac{F(x_0)}{f(x_0)} = \frac{0}{0} = \frac{F''(x_0)}{f''(x_0)}$.

Beispiel 1. Für $x = 2$ ist:

$$\frac{x^3 - 8}{2(x-2)} = \frac{0}{0} = \frac{3x^2}{2} = 6.$$

Beispiel 2. Für $x = 0$ ist: *)

$$\frac{1 - \cos x}{x^2} = \frac{0}{0} = \frac{\sin x}{2x} = \frac{0}{0} = \frac{\cos x}{2} = \frac{1}{2}$$

Beispiel 3. Für $x = 90^0$ ist:

$$\frac{\cos x - \sin x + 1}{\cos x + \sin x - 1} = \frac{0}{0} = \frac{-\sin x - \cos x}{-\sin x + \cos x} = 1$$

Beispiel 4. Für $x = a$ ist:

$$\frac{a - x - ala + alx}{a - \sqrt{2ax - x^2}} = \frac{0}{0} = -\frac{(2ax - x^2)^{\frac{1}{2}}}{x} = -1$$

82.

Aufgabe. Man bestimme die Werthe folgender Functionen:

---

*) Es ist (Analysis § 80):

$$\frac{1 - \cos x}{x^2} = \frac{1 - \left(1 - \frac{x^2}{1.2} + \frac{x^4}{1.2.3.4} - + \ldots\right)}{x^2} = \frac{1}{1.2} \quad (\text{für} \quad x = 0).$$

1. Für $x = 0$.

(1) $\frac{e^x - e^{-x}}{\sin x}$; (2) $\frac{\sin^2 x}{x}$; (3) $\frac{\sin x}{x}$;

(4) $\frac{x - \sin x}{x^3}$; (5) $\frac{e^x - e^{-x} - 2x}{x - \sin x}$; (6) $\frac{a^x - b^x}{x}$

2. Für $x = 1$.

(7) $\frac{lx}{x-1}$; (8) $\frac{x-1}{x^2-1}$; (9) $\frac{x^n - 1}{x-1}$; (10) $\frac{1-x}{lx}$

Auflösung. Man findet der Reihe nach die Werthe:

$2;\quad 0;\quad 1;\quad \frac{1}{6};\quad 2;\quad la - lb;\quad 1;\quad \frac{1}{2};\quad n;\quad -1.$

83.

Giebt die gebrochene Function $\frac{F(x)}{f(x)}$ für $x = x_0$ den Ausdruck $\frac{\infty}{\infty}$, so lässt sich dieser Fall auf den vorhergehenden $\frac{0}{0}$ zurückführen. Denn ist $F(x_0)$ und $f(x_0)$, $= \infty$, so ist: $\frac{1}{F(x_0)}$ und $\frac{1}{f(x_0)}$, $= 0$. Nun ist aber:

$$\frac{F(x_0)}{f(x_0)} = \frac{\infty}{\infty} = \frac{\frac{1}{f(x_0)}}{\frac{1}{F(x_0)}} = \frac{[f(x_0)]^{-1}}{[F(x_0)]^{-1}} = \frac{0}{0} = \frac{[f(x_0)]^{-2} f' x_0}{(F x_0)^{-2} F' x_0} = \frac{[F(x_0)]^2 . f'(x_0)}{[f(x_0)]^2 . F'(x_0)}$$

$$\frac{[F(x_0)]^2 . f'(x_0)}{[f(x_0)]^2 . F'(x_0)} = \frac{F(x_0)}{f(x_0)}$$

$$\frac{F(x_0)}{f(x_0)} = \frac{\infty}{\infty} = \frac{F'(x_0)}{f'(x_0)}$$

Die Regel bleibt also ganz dieselbe, wie in § 81. So ist z. B. für $x = 90^0$.

$$\frac{\operatorname{tg} 5x}{\operatorname{tg} x} = \frac{\infty}{\infty} = \frac{5}{\cos^2 5x} : \frac{1}{\cos^2 x} = \frac{5 \cos^2 x}{\cos^2 5x} = \frac{0}{0}$$

$$= \frac{-10 \cdot \cos x \cdot \sin x}{-10 \cdot \cos 5x \cdot \sin 5x} = \frac{\sin 2x}{\sin 10x} = \frac{0}{0}$$

$$= \frac{2 \cos 2x}{10 \cdot \cos 10x} = \frac{-2}{-10} = \frac{1}{5}.$$

84.

Führt das Product $F(x) \cdot f(x)$ für $x = x_0$ auf die Form $0 \cdot \infty$, wo also $F(x_0) = 0$ und $f(x_0) = \infty$ ist, so lässt sich auch dieser Fall wieder auf $\frac{0}{0}$ oder $\frac{\infty}{\infty}$ zurückführen. Denn es ist:

$$F(x_0) \cdot f(x_0) = 0 \cdot \infty = \frac{F(x_0)}{\frac{1}{f(x_0)}} = \frac{F(x_0)}{[f(x_0)]^{-1}} = \frac{0}{0}, \text{ mithin:}$$

$$F(x_0) \cdot f(x_0) = 0 \cdot \infty = -\frac{F'(x_0)}{[f(x_0)]^{-2} \cdot f'(x_0)}$$

Beispiel. Für $x = 0$ ist:

$$x \cdot lx = -0 \cdot \infty = \frac{lx}{x^{-1}} = -\frac{\infty}{\infty} = -\frac{x^{-1}}{x^{-2}} = -x = 0$$

85.

Führt eine Exponentialfunction, $[F(x)]^{f(x)}$, für $x = x_0$ auf eine der Formen 0^0, ∞^0, 1^∞, so setze man, um auch diese Fälle auf den vorhergehenden $\frac{0}{0}$ oder $\frac{\infty}{\infty}$ zurück zu führen, den gesuchten constanten Werth der Function $= A$, so dass also

$$A = [F(x)]^{f(x)}$$

Nimmt man nun beiderseits die Logarithmen, so ist:

$$lA = f(x) \cdot lF(x)$$

$$A = e^{f(x) \cdot lF(x)}$$

$$A = e^{\frac{lF(x)}{[f(x)]^{-1}}}$$

und man muss nun den Werth des gebrochenen Exponenten für $x = x_0$ bestimmen.

Beispiel 1. Für $x = 1$ ist:

$$x^{\frac{1}{1-x}} = 1^\infty = e^{\frac{lx}{1-x}} = e^{\frac{0}{0}} = e^{-\frac{1}{x}} = \frac{1}{e}$$

Beispiel 2. Für $x = 0$ ist:

$$(1+x)^{\frac{1}{x}} = 1^\infty = e^{\frac{l(1+x)}{x}} = e^{\frac{0}{0}} = e^{\frac{1}{1+x}} = e$$

Beispiel 3. Für $x = \infty$ ist:

$$\left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = 1^\infty = e^{\frac{l\left(1+\frac{1}{x}\right)}{x^{-1}}} = e^{\frac{0}{0}} = e^{\frac{1}{1+\frac{1}{x}}} = e$$

Beispiel 4. Für $x = 1$ ist:

$$(1 - x)^{1-x} = 0^0 = e^{\frac{l(1-x)}{(1-x)^{-1}}} = e^{-\frac{\infty}{\infty}} = e^{1-x} = 1$$

Beispiel 5. Für $x = 1$ ist:

$$\left(\frac{1}{1-x}\right)^{1-x} = \infty^0 = e^{\frac{-l(1-x)}{(1-x)^{-1}}} = e^{-\frac{\infty}{\infty}} = e^{1-x} = 1$$

86.

Führen endlich zwei gebrochene Functionen auf die Form $\infty - \infty$, so muss man sie auf einerlei Benennung bringen. So ist z. B. für $x = 1$

$$\frac{1}{x-1} - \frac{1}{lx} = \infty - \infty = \frac{lx - x + 1}{(x-1)\,lx} = \frac{0}{0}$$

$$= \frac{\frac{1}{x} - 1}{lx + \frac{x-1}{x}} = \frac{0}{0} = \frac{1 - x}{x\,lx + x - 1} = \frac{-1}{lx + 1 + 1} = -\tfrac{1}{2}.$$

87.

In den Fällen, wo die für $x = x_0$ im Zähler und Nenner verschwindenden Factoren auf gebrochene Potenzen erhoben sind und also die Reihen in (1) § 81 nicht nach ganzen Potenzen von Δx fortschreiten können, wie es die Differential-Rechnung verlangt, kann dieselbe auch zur Bestimmung des wahren Werthes der gebrochenen Function keine Dienste leisten (§ 46). Man muss dann Hülfe in der Analysis suchen, welche ohnehin manchmal viel schneller, als die Differential-Rechnung zum Ziele führt. Es sei z. B.:

$$y = \frac{(x^2 - a^2)^{\frac{3}{2}}}{(x - a)^{\frac{3}{2}}}$$

so ist für $x = a$; $y = \frac{0}{0}$.

Das Differentiiren (welches hier kein Ende nimmt) würde hier nicht zum Ziele führen. *)

Man setze deshalb $a+h$ statt x, so ist:

$$y = \frac{[(a+h)^2 - a^2]^{\frac{3}{2}}}{(a+h-a)^{\frac{3}{2}}} = \frac{(2ah+h^2)^{\frac{3}{2}}}{h^{\frac{3}{2}}} = \frac{h^{\frac{3}{2}}(2a+h)^{\frac{3}{2}}}{h^{\frac{3}{2}}} = (2a+h)^{\frac{3}{2}}$$

setzt man jetzt $h = 0$, so ist $y = \frac{0}{0} = (2a)^{\frac{3}{2}}$.

Beispiel. Es ist für $x = a$:

$$y = \frac{x^3 - 4ax^2 + 7a^2x - 2a^3 - 2a^2\sqrt{2ax - a^2}}{x^2 - 2ax - a^2 + 2a\sqrt{2ax - x^2}} = \frac{0}{0}.$$

Setzt man, weil das Differentiiren hier zu weitläufig ist, $a+h$ statt x, so ist:

$$y = \frac{2a^3 + 2a^2h - ah^2 + h^3 - 2a^2\sqrt{a^2+2ah}}{-2a^2 + h^2 + 2a\sqrt{a^2-h^2}} \cdots\cdots (1)$$

Verwandelt man $\sqrt{a^2+2ah} = a\left(1+\frac{2h}{a}\right)^{\frac{1}{2}}$ und $\sqrt{a^2-h^2} = a\left(1-\frac{h^2}{a^2}\right)^{\frac{1}{2}}$ in Reihen, so ist:

$$a\left(1+\frac{2h}{a}\right)^{\frac{1}{2}} = a\left(1 + \frac{h}{a} - \frac{h^2}{2a^2} + \frac{h^3}{2a^3} - \frac{5h^4}{8a^4} + \frac{7h^5}{8a^5} - \cdots\right)$$

$$a\left(1-\frac{h^2}{a^2}\right)^{\frac{1}{2}} = a\left(1 - \frac{h^2}{2a^2} - \frac{h^4}{8a^4} - \frac{h^6}{16a^6} - \cdots\right)$$

Dies in (1) substituirt und gehörig reducirt, kommt:

$$y = \frac{\frac{5}{4}\frac{h^4}{a} - \frac{7}{4}\frac{h^5}{a^2} + \cdots}{-\frac{h^4}{4a^2} - \frac{3}{8}\frac{h^6}{a^4} - \cdots} = \frac{\frac{5}{4}\cdot\frac{1}{a} - \frac{7}{4}\frac{h}{a^2} + \cdots}{-\frac{1}{4a^2} - \frac{3}{8}\frac{h^2}{a^4} - \cdots}$$

Setzt man nun $h = 0$, so ist für $x = a$:

$$y = \frac{0}{0} = -5a.$$

---

*) Aus der Gleichung folgt: $y^{\frac{2}{3}} = \frac{x^2 - a^2}{x - a} = \frac{0}{0} = \frac{2x}{1} = 2a$, daher $y = (2a)^{\frac{3}{2}}$.

Fünftes Buch.

Maxima und Minima.

88.

Eine der wichtigsten Anwendungen der Differential-Rechnung besteht darin, diejenigen Werthe der absolut veränderlichen Grösse zu bestimmen, für welche die daraus gebildete Function sich im Zustande des Maximums oder Minimums befindet. Sei allgemein:

$$y = \mathrm{F}(x)$$

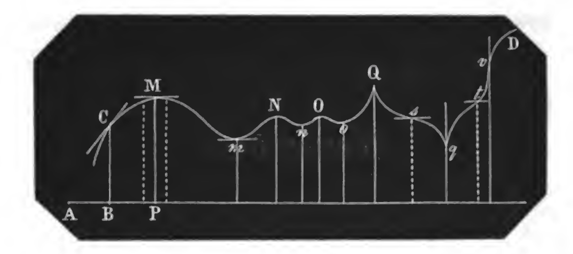
eine gesonderte Function, die wir uns der grössern Anschauung halber construirt denken wollen. CD möge ein Stück der entsprechenden krummen Linie sein.

Denkt man sich diese fingirte krumme Linie durch den Endpunct der parallel mit sich selbst fortgleitenden veränderlichen Ordinate CB beschrieben, so sieht man, dass dieselbe eine Zeit lang wächst, von C bis M, und dann wieder abnimmt, von M bis *m*; ferner wieder wächst und wieder abnimmt etc.

Man sagt nun, die Ordinate MP befinde sich im Zustande des Maximums, wenn die nächst*) vorher gehende und nächst folgende Ordinate beide kleiner sind. Bei unserer fingirten Linie wäre dies viermal der Fall, nämlich bei M, N, O und Q Die Ordinate befindet sich dagegen im Zustande des Minimums, wenn die nächst vorhergehende und nächst folgende Ordinate beide grösser sind, wie es hier in den Puncten, *m*, *n*, *o*, *q* der Fall ist.

---

*) Wir sagen hier absichtlich: nächst (unmittelbar) vorhergehende und folgende, um für den Fall, wo die Function sehr nahe liegende maxima oder minima hätte, keins davon zu überspringen.



Um also in den Zustand eines Maximums zu kommen, muss die Ordinate erst eine Zeit lang wachsen und darauf wieder abnehmen; umgekehrt ist es beim Minimum, da muss die Ordinate erst abnehmen und darauf wieder wachsen, wo dies nicht der Fall ist, da kann auch von einem Maximum oder Minimum nicht die Rede sein. Die Parabel z. B. kann also weder ein Maximum noch Minimum haben.

89.

Die figürliche Darstellung der Function $y = F(x)$ durch eine krumme Linie, führt wohl allein schon zu der richtigen Vorstellung, dass für diejenigen Puncte, wo die fortgleitende Ordinate sich im Zustande eines Maximums oder Minimums befindet, wie z. B. in M, m, Q, q, die Berührungslinie entweder parallel mit der Abscissenachse, oder senkrecht darauf sein und mithin der Differentialcoefficient $\frac{dy}{dx}$ (die trigonometrische Tangente des Berührungswinkels) $= 0$ oder $= \infty$ sein muss. *)

Um jedoch diese Behauptung zu beweisen und zugleich eine allgemeine Regel aufzustellsn, nach welcher man den Werth (Werthe) von x bestimmen kann, für welchen die Function: $y = F(x)$ ein Maximum oder Minimum wird, lassen wir dieses unbekannte x um eine sehr kleine Grösse, Δx, wachsen, so ist:

$$y + \Delta y = F(x) + \frac{dy}{dx} \cdot \Delta x + \frac{d^2 y}{dx^2} \cdot \frac{\Delta x^2}{1 \cdot 2} + \cdots$$

---

*) Vorausgesetzt jedoch, dass für den Werth von x, für welchen $\frac{dy}{dx} = 0$, ∞, die Function selbst nicht imaginair ist. Ist z. B. $y = \frac{b}{a}\sqrt{x^2 - a^2}$, so ist: $\frac{dy}{dx} = \frac{b}{a} \cdot \frac{x}{\sqrt{x^2 - a^2}}$ für $x = 0$, Null, y aber imaginair.

Da nun unter allen Umständen (selbst in den Ausnahmefällen) der erste Differential-Quotient $\frac{dy}{dx}$ die trigonometrische Tangente des Berührungswinkels giebt, so ist vermöge § 47 Folgendes klar:

1. So lange der erste Differential-Quotient $\frac{dy}{dx}$ positiv (und endlich) ist, ist der Berührungswinkel spitz und es wächst die Ordinate (Function) z. B. von C bis M, von m bis N, von o bis Q;

2. So lange der erste Differential-Coefficient negativ (und endlich) ist, ist der Berührungswinkel stumpf und es nimmt die Ordinate ab, z. B. von M bis m, von Q bis q;

3. Wenn also die Ordinate (Function) vom Wachsen zum Abnehmen oder umgekehrt übergeht, so muss nothwendig auch der erste Differential-Coefficient sein Vorzeichen umkehren, und mithin für die Werthe von x, wo dieser Uebergang, also ein Maximum oder Minimum Statt findet, nothwendig $= 0$ oder $= \infty$ sein. *)

90.

Es ist also klar, dass nur für solche Werthe von x die Ordinate (Function) $y = F(x)$ in den Zustand eines Maximums oder Minimums kommen kann, für welche zugleich auch der erste Differential-Quotient $\frac{dy}{dx} = F'(x)$ entweder $= 0$ oder $= \infty$ ist. Umgekehrt darf man jedoch nicht behaupten, dass für alle die Werthe von x, für welche $\frac{dy}{dx} = 0$ oder $= \infty$ ist, auch nothwendig ein Maximum oder Minimum Statt finden müsse. Denn es kann der erste Differential-Coefficient eine Zeit lang positiv (negativ) sein, bis zu Null abnehmen (Punct t), oder auch unendlich werden (Punct v), und dann statt sein Vorzeichen zu ändern, wieder in's Positive (Negative) übergehen, so dass also die Ordinate von q bis D fortwährend wächst. Zwischen diesen Puncten kann es

*) Eine Function einer veränderlichen Grösse, $F'(x)$, kann überhaupt nur ihr Vorzeichen ändern, d. h. vom Positiven zum Negativen oder umgekehrt übergehen, indem sie erst 0 oder ∞ wird. Die Function $(a-x)^3$ z. B. ist für $x < a$ positiv, für $x > a$ negativ, für $x = a$ Null. Die Function $\frac{1}{(a-x)^3}$ ist für $x = a$ unendlich, geht also vom Positiven zum Negativen durch's Unendliche über.

demnach, der Erklärung § 88 zufolge, weder Maxima noch Minima geben. Für ein Maximum oder Minimum ist ausser der Bedingung $\frac{dy}{dx} = 0$ oder $= \infty$ auch nothwendig noch die erforderlich: dass der erste Differential-Coefficient im Uebergange durch diesen Zustand sein Vorzeichen ändert (§ 89, 1, 2, 3), weil die nächst vorhergehende und folgende Ordinate beide kleiner (grösser) sein müssen.

91.

Als eine ganz allgemeine Regel die Werthe von x zu finden, für welche die Function (Ordinate) $y = \mathrm{F}(x)$ ein Maximum oder Minimum ist, könnte demnach folgende dienen:

1. Man differentiire die vorliegende Function und suche den Werth (Werthe) von x, für welchen der Differential-Quotient $\mathrm{F}'(x) = 0$, oder auch $\mathrm{F}'(x) = \infty$ wird. Hat man diesen mit x_0 zu bezeichnenden Werth (die Wurzeln der Gleichung $\mathrm{F}'(x) = 0$ oder $\mathrm{F}'(x) = \infty$) gefunden, so sehe man zu, ob der nächst vorhergehende und nächst folgende Werth dieses Differential-Quotienten, d.h. wenn h eine hinreichend kleine Grösse bedeutet (Rdbk. § 88), ob $\mathrm{F}'(x_0 - h)$ und $\mathrm{F}'(x_0 + h)$ entgegengesetzte Vorzeichen haben. Ist dann:

2. $\mathrm{F}'(x_0 - h)$ positiv und $\mathrm{F}'(x_0 + h)$ negativ, so geht die Function vom Wachsen zum Abnehmen über, und es findet ein Maximum Statt (Punct M, Q etc.). Umgekehrt findet ein Minimum Statt, wenn $\mathrm{F}'(x_0 - h)$ negativ, und $\mathrm{F}(x_0 + h)$ positiv ist. Die Function geht in diesem Falle vom Abnehmen wieder zum Wachsen über (Punct m, n, q).

92.

Für die am häufigsten vorkommenden Maxima und Minima, wo die Berührungslinie mit der Abscissenlinie parallel geht, und mithin alle Differential-Quotienten stetig bleiben, giebt uns der Taylor'sche Lehrsatz noch eine andere Regel, welche meistens viel leichter anzuwenden ist, als die im vorhergehenden § gegebene ganz allgemeine Regel.

Ist nämlich x_0 der Werth, für welchen $y = \mathrm{F}(x)$ ein Maximum oder Minimum wird, so sind $\mathrm{F}(x_0 - \Delta x)$ und $\mathrm{F}(x_0 + \Delta x)$ die nächst vorhergehenden und nächst folgenden Ordinaten. Oder,

indem man diese beiden nächsten Zustände nach dem Taylor'schen Lehrsatz entwickelt:

$$F(x_0 \mp \Delta x) = F(x_0) \mp F'(x_0) \cdot \Delta x + F''(x_0) \cdot \frac{\Delta x^2}{1 \cdot 2} \mp + \ldots$$

wo die Glieder mit graden Potenzen von $\mp \Delta x$ in beiden Fällen dieselben Vorzeichen haben. Da nun aber, sowohl für ein Maximum als Minimum der erste Differential-Quotient $F'(x_0) = 0$ ist, so bleibt uns noch:

$$F(x_0 \mp \Delta x) = F(x_0) + F''(x_0) \cdot \frac{\Delta x^2}{1 \cdot 2} \mp F'''(x_0) \cdot \frac{\Delta x^3}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \ldots .$$

Je nachdem nun für denselben Werh x_0, für welchen der erste Differential-Quotient $F'(x_0) = 0$ wird, der zweite Differential-Quotient $F''(x_0)$ positiv oder negativ ist, wird die Ordinate $F(x_0)$, sowohl rückwärts als vorwärts gleitend, wachsen oder abnehmen, d. h. die unmittelbar vorhergehende und folgende Ordinate $F(x_0 - \Delta x)$ und $F(x_0 + \Delta x)$ grösser oder kleiner als $F(x_0)$, mithin letztere ein Minimum oder Maximum sein.

93.

Zur Bestimmung derjenigen Maxima und Minima, wo die Berührungslinie parallel mit der Abscissenachse geht, lautet also die einfache Regel: Man setze den ersten Differential-Quotienten $F'(x) = 0$ und substituire den Werth x_0, welcher dieser Gleichung Genüge leistet, in den zweiten Differential-Quotienten $F''(x)$. Je nachdem dieser dann positiv oder negativ ist, hat man ein Minimum oder Maximum.

Zusatz. Es kann sich treffen, dass für denselben Werth x_0, für welchen der erste Differential-Quotient $= 0$ wird, auch der zweite Differential-Quotient $= 0$ ist, alsdann hätte man noch:

$$F(x_0 \mp \Delta x) = F(x_0) + F'''(x_0 \cdot \frac{(\mp \Delta x)^3}{1 \cdot 2 \cdot 3} + F^{IV}(x_0) \cdot \frac{\Delta x^4}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} \mp + \ldots$$

Ist nun der dritte Differential-Quotient $F'''(x_0)$ positiv, so wird offenbar (§ 46, 5) mit wachsender Abscisse $(+\Delta x)$ auch die Ordinate $F(x_0)$ wachsen, und mit abnehmender Abscisse $(-\Delta x)$ abnehmen, weil $(-\Delta x)^3 = -\Delta x^3$. Es ist dann $F(x_0 - \Delta x) < F(x_0)$ und $F(x_0 + \Delta x) > F(x_0)$. Ist der dritte Differential-Quotient negativ, so hat man umgekehrt $F(x_0 - \Delta x) > F(x_0)$ und

7*

$F(x_0 + \Delta x) < F(x_0)$. In beiden Fällen kann also $F(x_0)$ weder ein Maximum noch ein Minimum sein (§ 88).

Ist aber für denselben Werth von x, für welchen sowohl der erste als zweite Differential-Quotient $= 0$ ist, gleichzeitig auch der dritte $= 0$, so hat man noch:

$$F(x_0 \mp \Delta x) = F(x_0) + F^{IV}(x_0) \cdot (\pm \Delta x)^4 + F^{V}(x) \cdot (\pm \Delta x)^5 + \ldots.$$

und es ist dann $F(x_0)$ ein Maximum, wenn der vierte Differential-Quotient negativ, ein Minimum dagegen, wenn er positiv ist etc., d. h. wenn für einen Werth von $x, = x_0$ mehrere auf einander folgende Differential-Quotienten vom ersten an, gleichzeitig verschwinden $F'(x_0) = 0$, $F''(x_0) = 0$ etc., so findet nur dann ein Maximum oder Minimum Statt, wenn der zuerst nicht verschwindende von grader Ordnung ist.

94.

Aufgabe 1. Für welchen Werth von x wird:

$$y = \frac{x^3}{3} - 2x^2 + 3x + 5$$

ein Maximum oder Minimum.

Auflösung. Nach der gegebenen Regel ist hier:

$$\frac{dy}{dx} = x^2 - 4x + 3$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = 2x - 4$$

Aus $x^2 - 4x + 3 = 0$ folgt $x = 2 \pm 1$.

Für $x = 3$ wird $\frac{d^2y}{dx^2} = 2 \cdot 3 - 4$ also positiv, ein Minimum.

Für $x = 1$ wird $\frac{d^2y}{dx^2} = 2 - 4$ also negativ, ein Maximum.

Und zwar ist das Minimum $= 5$, das Maximum $= 6\frac{1}{3}$.

95.

Aufgabe 2. Man bestimme die Maxima oder Minima von folgender Function:

$$y = \frac{x^5}{5} - \frac{3}{2}x^4 + 4x^3 - 5x^2 + 3x + 1$$

Auflösung. Aus der Gleichung:

$$\frac{dy}{dx} = x^4 - 6x^3 + 12x^2 - 10x + 3 = 0$$

findet man, dass sie die vier reellen Wurzeln 1, 1, 1 und 3 hat. (Analysis 116.) Um zu entscheiden, ob für $x = 1$ und $x = 3$ ein Maximum oder Minimum Statt findet, substituiren wir diese Werthe statt x in:

$$\frac{d^2y}{dx^2} = 4x^3 - 18x^2 + 24x - 10.$$

Für $x = 3$ ist $\frac{d^2y}{dx^2}$ positiv, daher ein Minimum $y = 0,1$.

Für $x = 1$ hingegen ist auch $\frac{d^2y}{dx^2} = 0$, deshalb müssen wir noch weiter differentiiren:

$$\frac{d^3y}{dx^3} = 12x^2 - 36x + 24$$

Für $x = 1$ ist auch der dritte Differential-Quotient $= 0$, der vierte aber, nämlich:

$$\frac{d^4y}{dx^4} = 24x - 36$$

ist für $x = 1$ negativ. Für $x = 1$ ist also y ein Maximum $= 1,7$.

Anmerkung. Der Grund, dass für denselben Werth von x, mehrere successive Differential-Quotienten $= 0$ werden können, ist leicht einzusehen. In obigem Beispiel lässt sich der erste Differential-Quotient, in Factoren zerlegt, auch so schreiben:

$$\frac{dy}{dx} = (x-1)^3 \cdot (x-3), \text{ mithin: (§ 22)}$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = (x-3) \cdot 3(x-1)^2 + (x-1)^3 = (x-1)^2(4x-10)$$

$$\frac{d^3y}{dx^2} = (4x-10) \cdot 2(x-1) + (x-1)^2 \cdot 4 = (x-1)(12x-24)$$

$$\frac{d^4y}{dx^3} = (12x-24) + (x-1) \cdot 12 = 24x - 36$$

und es ist klar, dass die drei ersten Differential-Quotienten, wegen des gemeinschaftlichen Factors $x - 1$, für $x = 1$ gleichzeitig verschwinden müssen.

96.

Aufgabe 3. Für welchen Werth von x wird:

$$y = e^x + 2\cos x + e^{-x} = 4\left(1 + \frac{x^4}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4} + \frac{x^8}{1\cdot\cdot\cdot\cdot 8} + \frac{x^{12}}{1\cdot\cdot\cdot\cdot 12} + \cdot\cdot\cdot\cdot\cdot\right)$$

ein Maximum oder Minimum? (Analysis §§ 73 und 80.)

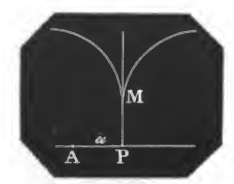
Auflösung. Für $x = 0$ wird jeder der drei ersten Differential-Quotienten $= 0$, der vierte aber positiv. Für $x = 0$ giebt es also ein Minimum, $y = 4$. Man kann also auch nach dem Maximum und Minimum convergenter Reihen fragen.

97.

Aufgabe 4. Für welchen Werth von x wird:

$$y = b + c(x-a)^{\frac{2}{3}}$$

ein Maximum oder Minimum?



Auflösung. Man hat hier zuerst:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{2}{3} \cdot \frac{c}{(x-a)^{\frac{1}{3}}}$$

Dieser erste Differential-Quotient kann für keinen bestimmten Werth von x, $= 0$ werden. Er wird aber ∞ für $x = a$. Für diesen Werth von x steht die Berührungslinie senkrecht auf der Abscissenachse. Um zu entscheiden, ob ein Maximum oder Minimum oder Keines von beiden Statt findet, müssen wir jetzt (weil hier alle Differential-Quotienten für $x = a$, unendlich werden § 46, 3), die allgemeine Regel § 91 anwenden.

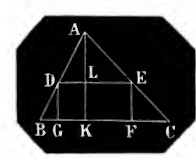
Wir substituiren also $a \mp h$ statt x, dann ist:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{2}{3} \frac{c}{(\mp h)^{\frac{1}{3}}}$$

Dieser erste Differential-Quotient ändert also von $x = a - h$ bis $x = a + h$ sein Vorzeichen. Für $x = a - h$ ist er negativ, der Berührungswinkel τ stumpf; für $x = a + h$ ist er positiv, der Berührungswinkel τ spitz. Für $x = a$ giebt es also ein Minimum, $y = b$. Dies kann man auch schon unmittelbar aus der gegebenen Function $y = b + c(x-a)^{\frac{2}{3}}$ erkennen, weil für $x = a$, $y = b$ und für $x = a \mp h$ immer $y > b$ ist.

98.

Aufgabe 5. Es ist von einem Dreieck, ABC, Grundlinie und Höhe gegeben, BC $= a$, AK $= h$. Es soll darin, wie Figura zeigt, ein Rechteck, DEFG, so gezeichnet werden, dass der Flächeninhalt desselben möglichst gross (ein Maximum) wird.



Auflösung. Es sei die unbekannte Höhe des Rechtecks DG $= x$, so ist AL $= h - x$. Die andere Seite DE des Rechtecks ergiebt sich aus: $h - x : h =$ DE $: a$, woraus DE $= \frac{a}{h}(h-x)$. Der Inhalt z des Rechtecks ist also ausgedrückt durch:

$$z = \frac{a}{h} x(h-x) = \frac{a}{h}(hx - x^2) \text{ *)}$$

so dass also z eine Function von x ist. Man hat nun:

$$\frac{dz}{dx} = h - 2x$$

Aus $h - 2x = 0$ folgt $x = \frac{1}{2}h$ und da der zweite Differential-Coefficient:

$$\frac{d^2z}{dx^2} = -2$$

negativ ist, so findet ein Maximum Statt. **) Von einem Minimum kann hier offenbar nicht die Rede sein.

99.

Aufgabe 6. In einem gegebenen Kreise ein Rechteck zu beschreiben, dessen Inhalt z ein Maximum ist.

Auflösung. Sei der gegebene Radius $= r$, die Grundlinie

---

*) Für denselben Werth von x, für welchen die Function $x(h-x)$ ein Maximum oder Minimum ist, wird es offenbar auch das Product $\frac{a}{h} \cdot x(h-x)$. Man kann also des leichtern Schreibens halber bei Bestimmung der Maxima und Minima einer Function von x, die constanten Factoren, womit dieselbe multiplicirt ist, gleich unberücksichtigt lassen.

**) In der Regel sieht man es schon voraus, ob ein Maximum oder Minimum Statt findet und hat deshalb selten nöthig, den oft lästigen zweiten Differential-Quotienten zu entwickeln.

des fraglichen Rechtecks $= x$, also die Höhe $= \sqrt{4r^2 - x^2}$, so ist der Inhalt:

$$z = x\sqrt{4r^2 - x^2}$$

Für denselben Werth von x, für welchen z ein Maximum wird, ist offenbar auch z^2 ein Maximum. Wir können deshalb, des leichtern Differentiirens halber, die Function erst rational machen und dann ist:

$$z^2 = 4r^2x^2 - x^4$$

$$\frac{d(z^2)}{dx} = 8r^2x - 4x^3 = 4x(2r^2 - x^2)$$

Für $x = 0$ giebt es gar kein Rechteck. Wir setzen deshalb den andern Factor $2r^2 - x^2 = 0$, woraus die Grundlinie $x = r\sqrt{2}$ und die Höhe $= \sqrt{4r^2 - 2r^2} = r\sqrt{2}$ folgt. Das grösste Rechteck, welches in dem Kreise construirt werden kann, ist also das Quadrat und dessen Inhalt $= 2r^2$.

100.



Aufgabe 7. In einer Kugel einen graden Kegel zu construiren, dessen Seitenfläche z ein Maximum ist.

Auflösung 1. Es sei AC$=r$ der Radius, AP$=x$ und MP$=y$, so ist $y = \sqrt{2rx - x^2}$; ferner BM$=\lambda$ gesetzt: $2r - x : \lambda = \lambda : 2r$, woraus: $\lambda = \sqrt{2r(2r - x)}$. Nun ist: $z = y\pi\lambda$, also:

$$z = \sqrt{2rx - x^2} \cdot \pi \cdot \sqrt{2r} \cdot \sqrt{2r - x}$$

$$z = \pi \cdot \sqrt{2r} \cdot (2r - x)\sqrt{x} = \pi\sqrt{2r} \cdot (2rx^{\frac{1}{2}} - x^{\frac{3}{2}})$$

$$\frac{dz}{dx} = rx^{-\frac{1}{2}} - \tfrac{3}{2}x^{\frac{1}{2}} = 0$$

$$\text{AP} = x = \tfrac{2}{3}r$$

Auflösung 2. Sei MCP$=\theta$, so ist $y = r\sin\theta$ und $\lambda = 2r\cos\frac{1}{2}\theta$, mithin ist:

$$z = r\sin\theta \cdot \pi \cdot 2r\cos\tfrac{1}{2}\theta = 2r^2\pi \cdot \sin\theta \cdot \cos\tfrac{1}{2}\theta$$

$$\frac{dz}{d\theta} = \cos\tfrac{1}{2}\theta \cdot \cos\theta - \tfrac{1}{2}\sin\theta \cdot \sin\tfrac{1}{2}\theta = 0$$

$$\operatorname{tg}\theta \cdot \operatorname{tg}\tfrac{1}{2}\theta = 2$$

$$\frac{1 - \cos\theta}{\cos\theta} = 2 \quad \text{(Trigon. § 100).}$$

$$\cos\theta = \tfrac{1}{3}$$

$$\text{AP} = r - r\cos\theta = \tfrac{2}{3}r$$

101.

Aufgabe 8. Eine Zahl, a, in zwei solche Theile zu theilen, dass deren Product ein Maximum wird.

Auflösung. Jeder der beiden Theile ist $= \frac{1}{2}a$.

Aufgabe 9. Eine Zahl, a, in zwei solche Theile zu theilen, dass das Product aus der zweiten Potenz des einen und der dritten Potenz des andern ein Maximum wird.

Auflösung. Die beiden Theile sind $\frac{2}{5}a$ und $\frac{3}{5}a$.

Aufgabe 10. Unter allen Brüchen denjenigen anzugeben, der sein Quadrat am meisten übertrifft.

Auflösung. Der gesuchte Bruch ist $= \frac{1}{2}$.

Aufgabe 11. Für welchen Werth von x wird $F(x) = \sin x \cdot \cos(a-x)$ ein Maximum oder Minimum?

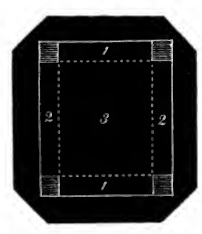
Antwort. Aus $F'(x) = \cos(a-2x) = 0$, folgt: $a - 2x = \pm\frac{\pi}{2}$. Für $x = \frac{a}{2} + \frac{\pi}{4}$ ein Maximum, und für $x = \frac{a}{2} - \frac{\pi}{4}$ ein Minim.

Aufgabe 12. In einem graden Kegel den grössten Cylinder zu beschreiben.

Auflösung. Heisst h die Höhe und r der Radius des gegebenen Kegels, so ist die Höhe des fraglichen Cylinders $= \frac{1}{3}h$.

102.

Aufgabe 13. Es ist ein Stück Papp in Form eines Rechtecks gegeben. An den Ecken sollen solche gleiche Quadrate weggenommen werden, dass, wenn die übrig bleibenden, rechtwinkligen Streifen 1, 1; 2, 2; senkrecht gegen die Fläche 3 aufgebogen werden, der entstehende hohle Kasten an Kubikinhalt V möglichst gross werde.



Auflösung, Es sei die Grundlinie des Rechtecks $= b$, die Höhe $= h$ und x die Seite der wegzunehmenden Quadrate, so ist die Fläche des Stücks (3), $= (b-2x)(h-2x)$, mithin das Volumen:

$$V = x(b-2x)(h-2x) = bhx - 2(b+h)x^2 + 4x^3$$

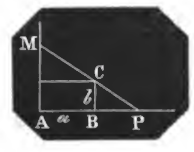
$$\frac{dV}{dx} = bh - 4(b+h)x + 12x^2 = 0$$

$$x = \frac{b + h \pm \sqrt{b^2 - bh + h^2}}{6}$$

Hier kann nur das untere Vorzeichen gelten, weil von einem Minimum, welches $=0$ sein würde, nicht die Rede sein kann. Wäre $h=b$, so wäre $x=\frac{1}{6}b$ und das Maximum $V=\frac{2}{27}b^3$. Man kann dieselbe Rechnung auch auf Dreiecke, Fünfecke etc. anwenden.

103.

Aufgabe 14. Zwichen den Schenkeln eines rechten Winkels, A, durch einen gegebenen Punct, C, die kürzeste Linie $MP=\lambda$ zu ziehen. (Von einem Maximum ($=\infty$) kann hier nicht die Rede sein.)



Auflösung 1. Es seien die Coordinaten des gegebenen Punctes: $AB=a$, $BC=b$ und $AP=x$, $AM=y$, so ist: $y:x=b:x-a$, woraus: $y=\frac{bx}{x-a}$, mithin:

$$\lambda^2=x^2+\frac{b^2x^2}{(x-a)^2}$$

$$\frac{d(\lambda^2)}{dx}=2x+\frac{(x-a)^2\cdot 2b^2x-b^2x^2\cdot 2(x-a)}{(x-a)^4}=0$$

$$x=a+\sqrt[3]{ab^2}$$

Auflösung 2. Man setze $\widehat{MPA}=\varphi$, so ist $CP=\frac{b}{\sin\varphi}$ und $MC=\frac{a}{\cos\varphi}$, mithin:

$$\lambda=\frac{a}{\cos\varphi}+\frac{b}{\sin\varphi}$$

$$\frac{d\lambda}{d\varphi}=\frac{a\sin\varphi}{\cos^2\varphi}-\frac{b\cdot\cos\varphi}{\sin^2\varphi}=0$$

$$\operatorname{tg}\varphi=\sqrt[3]{\frac{b}{a}}$$

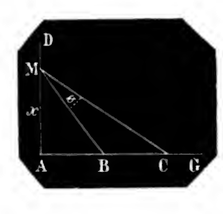
$$AP=a+b\cot\varphi=a+b\sqrt[3]{\frac{a}{b}}.$$

104.

Aufgabe 15. Es sind in der graden Linie AG zwei Puncte, B und C, gegeben, nämlich: $AC=a$, $AB=b$. In der auf BC senkrechten Linie AD, soll ein Punct, M, so bestimmt werden, dass die von ihm nach B und C gehenden Linien den möglichst

grössten Winkel θ bilden (die Linie BC in M unter dem grössten Gesichtswinkel erscheint). In welcher Höhe AM $= x$ liegt der Punct?

Auflösung. Es sei $\widehat{AMB} = u$, so ist:



$$\operatorname{tg} u = \frac{b}{x}; \quad \operatorname{tg}(u+\theta) = \frac{a}{x};$$

$$\frac{\operatorname{tg} u + \operatorname{tg}\theta}{1 - \operatorname{tg} u \cdot \operatorname{tg}\theta} = \frac{a}{x};$$

$$\frac{b}{x} + \operatorname{tg}\theta = \frac{a}{x} - \frac{ab}{x^2} \cdot \operatorname{tg}\theta$$

$$\operatorname{tg}\theta = \frac{(a-b) \cdot x}{ab + x^2}$$

Weil für denselben Werth von x, für welchen $\operatorname{tg}\theta$ ein Maximum ist, auch θ ein Maximum wird, so ist es nicht nöthig, diese Gleichung auf $\theta = \operatorname{arc\,tg} \frac{(a-b)x}{ab+x^2}$ zu reduciren. Man hat aus ersterer Gleichung, mit Vernachlässigung des einflusslosen Factors $a - b$:

$$\frac{d \cdot (\operatorname{tg}\theta)}{dx} = \frac{(ab + x^2) - x \cdot 2x}{(ab + x^2)^2} = 0$$

$$x = \sqrt{ab}.$$

Aufgabe 16. Um einen Kreis, dessen Radius $= r$ gegeben, ein gleichschenkliges Dreieck zu beschreiben, dessen Inhalt ein Minimum ist.

Auflösung. Sei der halbe Winkel an der Spitze $= \theta$, so ist die Höhe des Dreiecks $= r + \frac{r}{\sin\theta}$, die halbe Grundlinie $= \left(r + \frac{r}{\sin\theta}\right) \cdot \operatorname{tg}\theta$, mithin der Inhalt $z = \frac{r^2 (1 + \sin\theta)^2}{\sin\theta \cdot \cos\theta}$ und (§ 98 Randanmerkung):

$$\frac{dz}{d\theta} = \frac{2\sin\theta\cos^2\theta \cdot (1+\sin\theta) - (1+\sin\theta)^2 (\cos^2\theta - \sin^2\theta)}{\sin^2\theta \cdot \cos^2\theta} = 0$$

$$2\sin\theta(1 - \sin^2\theta) = (1 + \sin\theta)(1 - 2\sin^2\theta)$$

hieraus (beiderseits durch $1 + \sin\theta$ dividirt): $\sin\theta = \frac{1}{2}$, mithin $\theta = 30^0$. Das fragliche Dreieck ist folglich ein gleichseitiges.

105.

Aufgabe 17. Die Grundlinie und Höhe eines Rechtecks zu bestimmen, welches bei gegebenem Inhalt, a, den möglichst kleinsten Umfang (u) hat.

Auflösung. Um zuvor einzusehen, dass Umfang und Inhalt nicht von einander abhängen, sei, Beispiels halber, der Inhalt $a = 36\square'$. Nimmt man nun die Grundlinie $= 9'$, so ist die Höhe $= 4'$ und der Umfang $= 26'$. Nimmt man die Grundlinie $= 12'$, so ist die Höhe $= 3'$ und der Umfang jetzt $= 30'$ etc.

Sei also die Grundlinie $= x$, so ist die Höhe $= \frac{a}{x}$ und der Umfang

$$u = 2\left(x + \frac{a}{x}\right)$$

$$\frac{du}{dx} = 1 - \frac{a}{x^2} = 0$$

$$x = \sqrt{a}$$

Unter allen Rechtecken von gleichem Inhalte hat also das Quadrat den kleinsten Umfang.

Anmerkung. Man kann diese Aufgabe und alle ähnlichen auch umdrehen und so stellen: Die Grundlinie und Höhe eines Rechtecks zu bestimmen, welches bei gegebenem Umfange $= b$ den grössten Inhalt α hat. Denn heisst z die Grundlinie, so ist die Höhe $= \frac{1}{2}b - z$ und der Inhalt:

$$\alpha = (\tfrac{1}{2}b - z)z$$

$$\frac{d\alpha}{dz} = \tfrac{1}{2}b - 2z = 0$$

$$z = \tfrac{1}{4}b.$$

Wir haben hier also wieder ein Quadrat. Es ist demnach einerlei, ob wir den Umfang b als veränderlich und den Inhalt a als constant, oder umgekehrt den Umfang b als constant und den Inhalt a als veränderlich betrachten; das Verhältniss der unbekannten Grössen, Grundlinie und Höhe, bleibt in beiden Fällen dasselbe. Gauss macht darauf aufmerksam, dass hierin eine sehr feine Metaphysik liegt.

106.

Aufgabe 18. Den Radius und die Höhe eines graden Cylinders anzugeben, der bei gegebenem Inhalt a die kleinste Oberfläche z hat, die Grundflächen mitgerechnet.

Auflösung. Heisst r der Radius des Cylinders, so ist seine Höhe $h=\frac{a}{r^2\pi}$, mithin die Oberfläche: $z=2r\pi\cdot\frac{a}{r^2\pi}+2r^2\pi$ oder:

$$z=2\left(\frac{a}{r}+r^2\pi\right)$$

$$\frac{dz}{dr}=-\frac{a}{r^2}+2r\pi=0$$

$$r=\sqrt[3]{\frac{a}{2\pi}},\text{ und } h=\sqrt[3]{\frac{4a}{\pi}}=2r$$

Es ist mithin die Höhe gleich dem Durchmesser. Soll der Cylinder oben offen sein, so ist $h=r=\sqrt[3]{\frac{a}{\pi}}$.

107.

Aufgabe 19. Es sollen dieselben Dimensionen r und h für den Cylinder bestimmt werden, der jetzt bei gegebener Oberfläche $=a$ den grössten Inhalt hat.

Auflösung. Es ist $r=\sqrt{\frac{a}{6\pi}}$ und $h=\sqrt{\frac{2a}{3\pi}}=2r$.

Soll der Cylinder oben offen sein, so ist wieder $h=r=\sqrt{\frac{a}{3\pi}}$.

108.

Aufgabe 20. Es soll ein Haubenabschnitt, von gegebenem Cubicinhalt $=a$, construirt werden, dessen krumme Fläche z ein Minimum wird. Wie müssen die Höhe x des Abschnitts, und der Radius y des Grundkreises genommen werden?

Auflösung. Die Bedingungsgleichungen sind hier (Geometrie § 178, Amkg. 2 u. § 184, Zus.)

$$\frac{3y^2+x^2}{6}\cdot x\pi=a \text{ und } z=(x^2+y^2)\pi$$

und man findet $x=\sqrt[3]{\frac{3a}{2\pi}}=y$.

Aufgabe 21. Es sollen dieselben Dimensionen x, y für den Haubenabschnitt bestimmt werden, welcher bei gegebener krummer Oberfläche $= a$, den grössten Inhalt hat.

Auflösung. Man findet hier wieder $x = y = \sqrt{\frac{a}{2\pi}}$.

109.

Aufgabe 22. Den Werth von x zu finden, für welchen

$$y = x^x$$

ein Minimum wird. Von einem Maximum kann hier nicht die Rede sein.

Auflösung. Man hat hier zuvor:

$$ly = x \cdot lx$$

$$y = e^{x.lx}$$

$$\frac{dy}{dx} = e^{x.lx}(lx + 1) = 0.$$

Den Factor $e^{x.lx} = x^x$ kann man nicht $= 0$ setzen, ohnehin würden alle folgenden Differential-Quotienten, weil sie ihn enthalten, verschwinden, mithin von einem Minimum gar nicht die Rede sein können (§ 93). Wir setzen demnach den andern Factor $lx + 1 = 0$, woraus $lx = -1$ und $x = e^{-1} = \frac{1}{e}$ folgt. Das Minimum ist $\left(\frac{1}{e}\right)^{\frac{1}{e}}$.

110.

Aufgabe 23. Den Werth von x zu finden, für welchen

$$y = \sqrt[x]{x} = x^{\frac{1}{x}}$$

ein Maximum oder Minimum wird.

Auflösung. Man hat hier zuvor:

$$ly = \frac{1}{x} \cdot lx$$

$$\frac{dy}{ydx} = -lx \cdot \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x} \cdot \frac{1}{x}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x^{\frac{1}{x}}}{x^2}(1 - lx) = 0$$

$$x = e \text{ (Maximum } \sqrt[e]{e}\text{)}.$$

111.

Aufgabe 24. Die Werthe von x anzugeben, für welche die gebrochene Function

$$y = \frac{(x+2)^3}{(x+3)^2}$$

ein Maximum oder Minimum wird.

Auflösung. Es ist: $\frac{dy}{dx} = \frac{(x+2)^2\,(x+5)}{(x+3)^3}$.

1. Für $x = -3$ wird $\frac{dy}{dx} = \infty$. Wir müssen also in diesem Falle die allgemeine Regel (§ 91) anwenden, um zu entscheiden, ob ein Maximum oder Minimum Statt findet,*) mithin $-3 \mp h$ statt x setzen, dann ist:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{(-1 \mp h)^2 (2 \mp h)}{(\mp h)^3}$$

Nimmt man nun, wie es geschehen kann und muss, h verschwindend klein, so ist der Differential-Quotient $\frac{dy}{dx}$ für $-h$ negativ, für $+h$ positiv. Für $x = -3$ wird also y ein Minimum $(= -\infty)$.

2. Für $x = -2$ und $x = -5$ wird $\frac{dy}{dx} = 0$. Die Berührungslinie geht also mit der Abscissenlinie parallel. Um zu entscheiden, ob für diese Werthe von x ein Maximum oder Minimum Statt findet, wendet man auch hier (weil der zweite Differential-Quotient zu complicirt wird) bequemer die allgemeine Regel (§ 91) an. Für $x = -2 \mp h$ ist $\frac{dy}{dx} = \frac{(\mp h)^2 (3 \mp h)}{(1 \mp h)^3}$ positiv, sowohl vorher als nachher. Für $x = -2$ giebt es also weder ein Maximum noch Minimum.

Für $x = -5 \mp h$ ist $\frac{dy}{dx} = \frac{(-3 \mp h)^2 (\mp h)}{(-2 \mp h(^3}$ vorher positiv, nachher negativ. Für $x = -5$ wird also y ein Maximum $= -6\frac{3}{4}$.

*) Dies leuchtet hier viel einfacher aus der Function selbst hervor.

Anmerkung 1. Dass unter mehreren negativen Ordinaten die kleinste ($-6\frac{3}{4}$) ein Maximum, im positiven Sinne genannt werden muss, wird klar, indem man die Abscissenachse um so viel tiefer gelegt denkt. Umgekehrt ist ein Maximum im negativen Sinne ein Minimum im positiven Sinne genommen.

Anmerkung 2. Will man in diesem Falle, nämlich bei gebrochenen Functionen, auch den zweiten Differential-Quotienten entwickeln, und

$$\frac{dy}{dx}=\frac{(x+2)^2(x+5)}{(x+3)^3}=\frac{P}{Q}$$

nochmals differentiiren, so wird man folgenden Rechnungsvortheil nicht aus den Augen lassen.

Nachdem man nämlich den Nenner mit dem Differential des Zählers multiplicirt hat, braucht man den Zähler (eben weil er ja für ein Maximum oder Minimum $=0$ ist) nicht mit dem Differential des Nenners zu multipliciren. Man hat also hier z. B. kürzer:

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{(x+3)^3}{}\left\{\frac{(x+5)\cdot 2(x+2)+(x+2)^2}{(x+3)^6}\right\}$$

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{3(x+2)(x+4)}{(x+3)^3}=\frac{1}{Q}\cdot\frac{dP}{dx}$$

Man hat also nur den Zähler des ersten Differential-Quotienten zu differentiiren und den Nenner, wie er ist, zu lassen.

Für $x=-5$ ist $\frac{d^2y}{dx^2}$ negativ, daher ein Maximum.

Für $x=-2$ ist aber $\frac{d^2y}{dx^2}=0$. Wir müssen also weiter differentiiren (§ 75).

$$\frac{d^3y}{dx^3}=\frac{6x+18}{(x+3)^3}=\frac{1}{Q}\cdot\frac{d^2P}{dx^2}.$$

Da nun dieser dritte Differential-Quotient für $x=-2$ nicht auch $=0$ wird, so giebt es für $x=-2$ weder ein Maximum noch Minimum (§ 75 Zus.).

Aufgabe 25. Für welchen Werth von x wird der Bruch: $\frac{x}{lx}$ ein Minimum?

Auflösung. Es ist $x = e$ und das Minimum auch $= e$.

Aufgabe 26. Für welchen Werth von x wird der Bruch: $\frac{x}{1+x^2}$ ein Maximum oder Minimum?

Auflösung. Für $x = +1$ ein Maximum $= \frac{1}{2}$, für $x = -1$ ein Minimum $= -\frac{1}{2}$. (Siehe Anmerkung 2, § 111.)

Sechstes Buch.

Vom Laufe der krummen Linien. Convexität, Concavität, Inflexion.

112.

Erklärung. Eine krumme Linie oder ein Theil derselben heisst convex (erhaben) oder concav (hohl) gegen die Abscissenachse, je nachdem derselbe, von irgend einem seiner Puncte aus betrachtet, ganz ausserhalb der durch diesen Punct gedachten Berührungslinie und der Abscissenachse liegt, wie mMM' oder dazwischen fällt, wie nNM', und durch eine grade Linie nicht in mehr als zwei Puncten geschnitten werden kann.

Die Puncte, wo eine krumme Linie von Convexität in Concavität oder umgekehrt übergeht, heissen Inflexions- oder Wendungspuncte. (Z. B. s. t. v. Fig. § 88.)

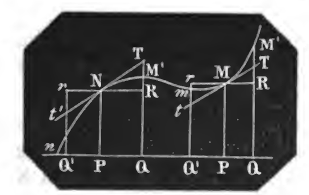
Eine krumme Linie oder Bogen, welcher einen Wendungspunct hat, also theils convex, theils concav ist, kann durch eine grade Linie in mehr als zwei Puncten geschnitten werden.

113.

Um nun eine allgemeine Regel zu finden, nach welcher man beurtheilen kann, ob eine krumme Linie, deren Gleichung $y = F(x)$ gegeben, von einem bestimmten Puncte, M oder N, aus betrachtet, convex oder concav ist, und wo ihre etwaigen Wendungspuncte liegen, bringt die Differential- oder Fluxions - Rechnung durch

unmittelbare Anwendung des Taylor'schen Lehrsatzes die Function $y = F(x)$ ganz einfach zum Fliessen. *)

114.



Seien x, y die Coordinaten eines Punctes, M oder N. Setzen wir in: $y = F(x)$, $x + \Delta x$ statt x, und ziehen den alten Zustand von dem neuen ab, so ist bekanntlich:

$$\Delta y = RM' = \frac{dy}{dx} \cdot \Delta x + \frac{d^2 y}{dx^2} \cdot \frac{\Delta x^2}{1 \cdot 2} + \frac{d^3 y}{dx^3} \cdot \frac{\Delta x^3}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \ldots .$$

$$\text{und: } RT = \frac{dy}{dx} \cdot \Delta x$$

Da wir nun, um keinen Wendungspunct zu überspringen, Δx so klein annehmen müssen und können, dass jedes Glied in der Taylor'schen Reihe grösser ist, als die Summe aller folgenden, so erhellet leicht, dass wenn für positive und wachsende Ordinaten, wo ja $\frac{dy}{dx}$ immer positiv ist, **) der zweite Differential-Quotient $\frac{d^2 y}{dx^2}$ auch positiv ist, dann nothwendig $RM' > RT$ ist (die Ordinate wächst accelerirend), und die krumme Linie von M aus oberhalb der Berührungslinie liegt, mithin vorwärts convex ist. Dies ist sie dann aber auch rückwärts. Denn lassen wir die Ordinate $MP = y$ zurückfliessen, indem wir $-\Delta x$ statt $+\Delta x$ setzen, so bleibt, wegen der graden Potenz, das Glied $\frac{d^2 y}{dx^2} \cdot \frac{(-\Delta x)^2}{1 \cdot 2}$ positiv, und es ist dann:

---

*) Diejenigen Puncte, welche in der Abscissenachse selbst liegen, so wie auch die, wo die Berührungslinie senkrecht auf der Abscissenachse steht, und der Taylor'sche Lehrsatz keine Anwendung findet, werden wir §§ 118 und 124 besonders betrachten.

**) Der Fall, wo die Ordinate sich gerade im Zustande eines Minimums oder Maximums befindet, und $\frac{dy}{dx} = 0$ ist, macht keine Ausnahme.

$$\overline{rm} = \frac{dy}{dx}(-\Delta x) + \frac{d^2y}{dx^2} \cdot \frac{\Delta x^2}{1 \cdot 2} + \ldots .$$

$$rt = \frac{dy}{dx}(-\Delta x)$$

d. h. rm ist kleiner als rt, (die Ordinate nimmt retardirend ab), mithin der Bogen M'Mm, weil oberhalb der Berührungslinie liegend, convex.

2. Ist der zweite Differential-Quotient negativ, wie es für die Abscisse des Punctes N der Fall ist, so ist nothwendig $RM' < RT$ und $rn > rt'$, und die krumme Linie ist dann von N aus sowohl vorwärts als rückwärts concav.

115.

Wir haben im vorhergehenden § wachsende und positive Ordinaten angenommen. Es ist jedoch (nöthigenfalls durch Hülfe einer Figur) leicht einzusehen, dass ganz dieselben Schlüsse für abnehmende positive Ordinaten, wo $\frac{dy}{dx}$ negativ ist, so wie auch für die Puncte, wo $\frac{dy}{dx} = 0$ ist, Statt finden. Für negative Ordinaten jedoch findet gerade umgekehrt Convexität Statt, wenn $\frac{d^2y}{dx^2}$ negativ, und Concavität, wenn $\frac{d^2y}{dx^2}$ positiv ist. Mit Berücksichtigung des Vorzeichens der Ordinate y ist daher die allgemeine Regel, welche alle Fälle umfasst: Eine krumme Linie ist so lange convex, als das Product $y \cdot \frac{d^2y}{dx^2}$ positiv, concav dagegen, wenn dieses Product negativ ist.

116.

Für diejenigen Abscissen aber, für welche als dritter Fall, der zweite Differential-Quotient $= 0$ ist, ist für das Fortfliessen und Zurückfliessen der Ordinate y, die Differenz derselben:

$$\Delta y = \frac{dy}{dx}(\pm \Delta x) + \frac{d^3y}{dx^3} \cdot \frac{(\pm \Delta x^3}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \ldots .$$

Ist nun der dritte Differential-Quotient $\frac{d^3y}{dx^3}$ positiv, so ist

für $+\Delta x$, RM' > RT (weil ja RT $= \frac{dy}{dx}\Delta x$) und für $-\Delta x$, $rm > rt$, mithin die krumme Linie vorwärts convex und rückwärts concav, und folglich dieser Punct nothwendig ein Wendungspunct.

Ist umgekehrt der dritte Differential-Quotient **negativ**, so ist für $+\Delta x$, RM < RT und für $-\Delta x$, $rm < rt$, mithin die krumme Linie vorwärts concav, rückwärts convex, und dieser Punct nothwendig wieder ein Wendungspunct.

In den Wendungspuncten muss demnach die Berührungslinie die krumme Linie allemal schneiden.

117.

Aus vorstehendem § folgt also zur Auffindung der Wendungspuncte einer krummen Linie die leichte Regel: Man setze den zweiten Differential-Quotienten $\frac{d^2y}{dx^2} = F''(x) = 0$, so geben die reellen Wurzeln dieser Gleichung die Abscissen der Wendungspuncte.

Anmerkung. Es kann sich treffen, dass für denselben Werth x_0, für welchen der zweite Differential-Quotient $F''(x) = 0$ wird, auch noch der folgende oder mehrere successiv folgende verschwinden. Alsdann kann es offenbar nur einen Wendungspunct geben, wenn der erste nicht verschwindende höhere Differential-Quotient von **ungrader** Ordnung ist.

118.

*) Wir haben nun schliesslich noch den Fall zu betrachten, wo in einem Puncte die Berührungslinie senkrecht auf der Abscissenlinie steht und folglich alle Differential-Quotienten ∞ (unstetig) sind. Hier kann jedoch der Taylor'sche Lehrsatz nur darauf aufmerksam machen, dass man diesen Fall besonders betrachten und zusehen muss, was vorher und nachher passirt.

Ist nämlich $y = F(x)$ die Gleichung einer krummen Linie, und x_0 die Abscisse, für welche $F'(x)$, $F''(x)$ etc. $= \infty$ sind, so ist $F(x_0 - \Delta x)$ die nächst vorhergehende, und $F(x_0 + \Delta x)$ die nächst folgende Ordinate. Sind nun:

1. beide Ordinaten reell und gleichzeitig kleiner oder grösser, als die Ordinate $F(x_0)$, so findet ein Maximum oder Minimum, aber kein Wendungspunct Statt. Die krumme Linie bildet einen Pfeil, wie bei Q, q, § 88.

2. Ist die eine Ordinate grösser, die andere kleiner als $F(x_0)$, so ist der fragliche Punct ein Wendungspunct (z. B. Punct *t*, § 88). Dies zeigt dann auch der zweite Differential-Quotient $F''(x_0 \mp \Delta x)$, der dann von $x = x_0 - \Delta x$ bis $x = x_0 + \Delta x$, vom Positiven zum Negativen, oder umgekehrt, durch's Unendliche übergeht.

3. Ist von den beiden Grössen $F(x_0 - \Delta x)$ und $F(x_0 + \Delta x)$ die eine reell, die andere imaginair, so giebt es (im Allgemeinen) erstens einen Rückkehrpunct, wenn die reelle Grösse nur einen einzigen Werth hat, zweitens einen Schnabel, wenn die reelle Grösse zwei Werthe hat, die beide grösser, oder auch beide kleiner als $F(x_0)$ sind; drittens wenn aber der eine Werth grösser, der andere kleiner als $F(x_0)$ ist, so bezeichnet der fragliche Punct einfach die Grenze der krummen Linie.

4. Wenn endlich beide Grössen $F(x_0 - \Delta x)$ und $F(x_0 + \Delta x)$, oder auch nur eine derselben mehr als zwei Ordinaten geben, so ist der fragliche Punct (im Allgemeinen) gleichzeitig, sowohl ein Wendungspunct, als auch ein sogenannter vielfacher Punct, und zwar ein doppelter Punct, wenn zwei, und ein dreifacher Punct, wenn drei Zweige durch ihn gehen etc.

Anmerkung. Diese eben erwähnten Puncte pflegt man wohl die besondern Puncte der krummen Linien zu nennen.

Um sie zu finden, kann aber die Differential-Rechnung (weil gerade in diesen Fällen der Taylor'sche Lehrsatz nicht anwendbar ist) keine andere Vorschrift geben, als dass man erst zusieht, in welchen Fällen die Differential-Quotienten 0, ∞ oder $\frac{0}{0}$ werden, und dann die Art des fraglichen Puncts bestimmt, indem man unmittelbar untersucht, wie viel Zweige der Curve durch diesen Punct gehen, ob sie sich diesseits oder jenseits erstrecken und zugleich auch die Lage der Berührungslinien bestimmt.

119.

Aufgabe. Zu untersuchen, ob die Parabel concav oder convex gegen die Abscissenlinie ist und einen Wendungspunct hat.

Auflösung. Aus der Gleichung $y = \sqrt{ax}$ folgt:

$$\frac{dy}{dx} = \tfrac{1}{2} a^{\frac{1}{2}} x^{-\frac{1}{2}}$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = -\tfrac{1}{4}\sqrt{\frac{a}{x^3}}$$

Da hier der zweite Differential-Quotient für jeden Werth von x negativ, so ist die Parabel in ihrem ganzen Verlauf concav gegen die Abscissenachse. Einen Wendungspunct kann es schon deshalb nicht geben, weil der zweite Differential-Quotient nicht $= 0$ gesetzt werden kann. Ebenso verhält es sich mit den beiden übrigen Kegelschnitten.

120.

Aufgabe. Die logarithmische Linie $y = lx$ in Bezug auf Convexität, Concavität und Wendungspunct zu discutiren.

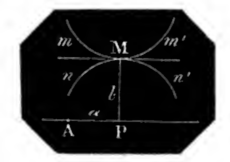
Auflösung. Aus der Gleichung folgt:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{x}; \qquad \frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{1}{x^2}$$

Für alle $x > 1$ ist das Product $y . \frac{d^2y}{dx^2}$ negativ; die Linie also concav (§ 95). Für alle x, welche echte Brüche sind, ist y negativ, das Product $y \cdot \frac{d^2y}{dx^2}$ positiv; der unterhalb der Abscissenachse liegende Zweig also convex.

Ein Wendungspunct kann nicht Statt finden, weil der zweite Differential-Quotient für keinen Werth von x, $= 0$ werden kann.

121.



Aufgabe. Den Lauf der Curve anzugeben, deren Gleichung:

$$y = b + (x - a)^4$$

Auflösung. Es ist:

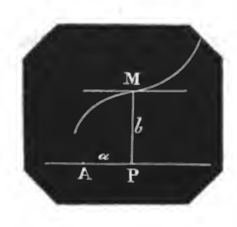
$$\frac{dy}{dx} = 4(x-a)^3; \qquad \frac{d^2y}{dx^2} = 12(x-a)^2$$

$$\frac{d^3y}{dx^3} = 24(x-a); \qquad \frac{d^4y}{dx^4} = 24.$$

Für $x = a$ ist $\frac{dy}{dx} = 0$. Die Berührungslinie geht parallel mit der Abscissenlinie; die Ordinate $y = b$ ein Minimum, weil für $x = a$, der erste nicht verschwindende grade Differential-Quotient

$\frac{d^4y}{dx^4}$ positiv ist (§ 93). Dies folgt auch schon, erstens: aus der Gleichung selbst, indem für $x=a\pm h$, die Ordinate $y=b+h^4$; zweitens daraus: weil der erste Differential-Quotient $\frac{dy}{dx}$ von $x=a-h$ bis $x=a+h$ sein Vorzeichen ändert. Der zweite Differential-Quotient ist zwar $=0$ für $x=a$, es findet deshalb aber kein Wendungspunct Statt, weil der erste nicht verschwindende höhere Differential-Quotient kein ungrader ist (§ 117). Einfacher noch folgt dies aus dem Verhalten des zweiten Differential-Quotienten, der für alle Werthe, welche dem $x=a$ vorhergehen und folgen, stets positiv und mithin die krumme Linie (mm') auch stets convex ist. Man wird, als zur Uebung dienend, finden, dass die der Gleichung: $y=b-(x-a)^4$ entsprechende Linie (nn') für positive Ordinaten stets concav ist und für $x=a$ ein Maximum, $y=b$, hat.

122.



Aufgabe. Den Lauf der krummen Linie anzugeben, deren Gleichung:

$$y=b+(x-a)^5$$

Auflösung. Hier ist:

$$\frac{dy}{dx}=5\,(x-a)^4$$

$$\frac{d^2y}{dx^2}=20\,(x-a)^3$$

Es ist nun zwar für $x=a$, $\frac{dy}{dx}=0$ und die Berührungslinie wieder parallel mit der Abscissenachse, jedoch findet weder ein Maximum noch Minimum Statt, weil für $x=a$ der erste nicht verschwindende höhere Differential-Quotient $\frac{d^5y}{dx^5}=120$ nicht von grader Ordnung ist (§ 93). Dies erhellet noch leichter, erstens: aus der Gleichung selbst, indem die nächste Ordinate für $x=a-h$ kleiner, für $x=a+h$ aber grösser ist, als für $x=a$; zweitens: aus dem Verhalten des ersten Differential-Quotienten, der für $x=a\mp h$ stets positiv ist (sein Vorzeichen nicht ändert).

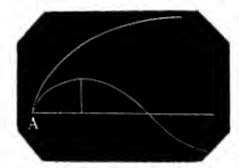
Der zweite Differential-Quotient wird $=0$ für $x=a$, und da nun der erste nicht verschwindende höhere Differential-Quotient $\left(\frac{d^5y}{dx^5}\right)$ von ungrader Ordnung ist, so findet für $x=a$ ein Wendungspunct Statt (§ 97) und zwar ist die krumme Linie nach M stets convex, vor M für positive Ordinaten concav, für negative convex (§ 115).

123.

Aufgabe. Die krumme Linie zu discutiren, deren Gleichung:

$$y=\sqrt[3]{x}\pm\sqrt{x}$$

Auflösung. Weil jede grade Wurzel das doppelte Vorzeichen hat, so ist zuerst klar, dass die krumme Linie sich nach der positiven Seite hin, mit zwei Schenkeln in's Unendliche erstreckt. Für $x=1$ schneidet der untere Schenkel die Abscissenachse. Da nun:



$$\frac{dy}{dx}=\frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}\pm\frac{1}{2\sqrt{x}}$$

$$\frac{d^2y}{dx^2}=-\frac{2}{9\sqrt[3]{x^5}}\mp\frac{1}{4\sqrt{x^3}}$$

und $\frac{dy}{dx}$ für $x=0$, unendlich ist, so steht die Berührungslinie im Anfangspunct A beider Schenkel senkrecht auf der Abscissenachse.

Für den obern Schenkel giebt es weder ein Maximum noch ein Minimum, weil $\frac{dy}{dx}$ für $x=0$ bis $x=\infty$ immer positiv ist. Da ferner für diesen Schenkel $\frac{d^2y}{dx^2}=-\left(\frac{2}{9\sqrt[3]{x^5}}+\frac{1}{4\sqrt{x^3}}\right)$ nicht $=0$ werden kann, und immer negativ ist, so bleibt dieser Schenkel in seinem ganzen Verlauf concav.

Für den untern Schenkel, welcher mit dem obern einen Schnabel bildet, ist:

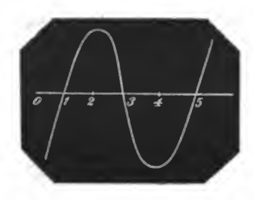
$$\frac{dy}{dx}=\frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}-\frac{1}{2\sqrt{x}};\qquad \frac{d^2y}{dx^2}=-\frac{2}{9\sqrt[3]{x^5}}+\frac{1}{4\sqrt{x^3}}$$

Für $x = (\frac{2}{3})^6$ wird $\frac{dy}{dx} = 0$ und da für diesen Werth von x der zweite Differential-Quotient negativ ist, so giebt es ein Maximum $\left(y = \frac{4}{27}\right)$.

Um einen etwaigen Wendungspunct zu finden, setzen wir $\frac{d^2y}{dx^2} = 0$, woraus: $x = \left(\frac{8}{9}\right)^6$. Für diesen Werth von x giebt es einen Wendungspunct, weil der dritte Differential-Quotient nicht $= 0$ ist etc.

124.

Aufgabe. Den Lauf der parabolischen Linie anzugeben, deren Gleichung:



$$y = x^3 - 9x^2 + 23x - 15.$$

Auflösung. Man hat hier:

$$\frac{dy}{dx} = 3x^2 - 18x + 23;$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = 6x - 18; \quad \frac{d^3y}{dx^3} = 6.$$

Es ist, wie aus der Auflösung der cubischen Gleichung $x^3 - 9x^2 + 23x - 15 = 0$ folgt: $y = (x-1)(x-3)(x-5)$, mithin: $y = 0$ für $x = 1$, $= 3$, $= 5$. Von $x = 1$ bis $x = 3$ ist y stets positiv; von $x = 3$ bis $x = 5$ ist y negativ. Für $x < 1$ ist y immer negativ; für $x > 5$ immer positiv. Die krumme Linie schneidet die Abscissenachse also dreimal.

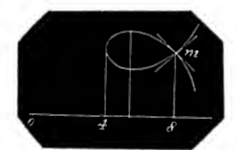
Ferner folgt aus: $\frac{dy}{dx} = 3x^2 - 18x + 23 = 0$, dass $x = 3 \pm \sqrt{\frac{4}{3}}$. Da nun $\frac{d^2y}{dx^2}$ für $x = 3 + \sqrt{\frac{4}{3}}$ positiv und für $x = 3 - \sqrt{\frac{4}{3}}$ negativ ist, so findet für erstern Werth von x ein Minimum und für den andern ein Maximum Statt. Für einen etwaigen Wendungspunct folgt aus $\frac{d^2y}{dx^2} = 6x - 18 = 0$, dass $x = 3$. Da aber für diesen Werth von x, die Ordinate $y = 0$ und also das Product $y \cdot \frac{d^2y}{dx^2}$ weder positiv noch negativ ist (§ 115), so muss man in diesem Falle,

wo nämlich der fragliche Wendungspunct in der Abscissenachse liegt, das Verhalten des zweiten Differential-Quotienten hinsichtlich seines Vorzeichens unmittelbar vor und nach diesem Durchschnittspunct untersuchen. Für $x = 3 \mp h$ ist $\frac{d^2y}{dx^2} = \mp 6h$. Vor dem Durchschnittspunct sind die Ordinaten positiv, also $y \cdot \frac{d^2y}{dx^2}$ negativ. Nach dem Durchschnittspunct sind die Ordinaten negativ, also $y \cdot \frac{d^2y}{dx^2}$ wiederum negativ. Die krumme Linie ist also vor und nach dem Durchschnittspunct concav und deshalb muss der Durchschnittspunct ein Wendungspunct sein. Es ist auch unmittelbar einleuchtend, dass eine einförmige krumme Linie, die sich ohne Wendungspunct durch die Abscissenachse hindurch zieht, auf der einen Seite nothwendig concav, auf der andern Seite convex ist. Ist eine einförmige krumme Linie aber auf beiden Seiten concav oder convex, so ist der Durchschnittspunct ein Wendungspunct.

125.

Aufgabe. Die krumme Linie zu discutiren, deren Gleichung:

$$y = 4 \pm (x - 8) \cdot \sqrt{(x - 4)}.$$



Auflösung. Für $x < 4$ ist y imaginair. Für $x > 4$ bekommt y zwei Werthe, die gleichviel über und unter 4 sind. Die krumme Linie wird also durch eine mit der Abscissenachse parallele Grade in zwei Hälften getheilt. Für $x = 8$ werden beide Ordinaten gleich $(= 4)$. In m ist ein Doppelpunct. Ferner hat man:

$$\frac{dy}{dx} = \pm \sqrt{x - 4} \pm \frac{x - 8}{2\sqrt{x - 4}}$$

Für $x = 4$ wird $\frac{dy}{dx} = \pm \infty$. Die Berührungslinie steht senkrecht auf der Abscissenachse. Für $x = 8$, wird $\frac{dy}{dx} = \pm 2$. Im Doppelpunct m giebt es also zwei Berührungslinien. Für $x = 5\frac{1}{3}$ giebt es ein Maximum und Minimum etc.

Siebentes Buch.

Von der Krümmung der Curven.

126.

Erklärung. Seien $y = F(x)$ und $\mathrm{y} = f(x)$ die Gleichungen zweier krummen Linien, CD, EF, welche auf dieselbe Abscissenlinie und auf denselben Anfangspunct bezogen sind. Wäre nun für einen bestimmten Werth, x, $F(x) = f(x)$, so haben die krummen Linien für diesen Werth x einerlei Ordinate $y = \mathrm{y} = MP$ und gehen also beide durch denselben Punct M. Lässt man die Abscisse um Δx wachsen, so haben wir:

$$y + \Delta y = F(x) + F'(x) \cdot \Delta x + F''(x) \cdot \frac{\Delta x^2}{1 \cdot 2} + \cdots$$

$$\mathrm{y} + \Delta \mathrm{y} = f(x) + f'(x) \cdot \Delta x + f''(x) \cdot \frac{\Delta x^2}{1 \cdot 2} + \cdots$$

Wäre nun ausser $f(x) = F(x)$ auch noch $f'(x) = F'(x)$, so haben beide krummen Linien in dem gemeinschaftlichen Puncte M auch eine gemeinschaftliche Berührungslinie, und Lagrange sagt: in diesem Falle finde unter beiden krummen Linien im Puncte M eine Berührung ersten Grades Statt. Wäre ausserdem auch noch $f''(x) = F''(x)$, so nennt Lagrange dies eine Berührung zweiten Grades, und wenn noch $f'''(x) = F'''(x)$, eine Berührung dritten Grades etc.

Es ist einleuchtend, je mehr auf einander folgende stetige Differential-Quotienten, vom ersten an, einander gleich sind, je inniger schmiegen die beiden krummen Linien, in der Nähe ihres gemeinschaftlichen Punctes M, sich an einander.

127.

Aufgabe. Es sei die eine Linie vollkommen bestimmt, z. B. eine Parabel, $y = \sqrt{9x}$, die andere Linie aber nur der Art nach bestimmt, sie soll z. B. eine parabolische Linie sein, deren Gleichung die Form: $y = a + bx + cx^3$ hat. Man soll nun die Coefficienten a, b, c so bestimmen, dass diese Linie mit der Parabel $y = \sqrt{9x}$ im Puncte M, dessen Coordinaten $x = 4$, also $y = 6$ sind, die möglichst innigste Berührung eingeht.

Auflösung. Man hat zuerst aus den beiden Gleichungen:

$$y = \sqrt{9x} \qquad\qquad y = a + bx + cx^3$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{3}{2\sqrt{x}} \qquad\qquad \frac{dy}{dx} = b + 3cx^2$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{3}{4\sqrt{x^3}} \qquad\qquad \frac{d^2y}{dx^2} = 6cx$$

Da nun im gegebenen Berührungspunct M beide Ordinaten y, y gleich sein müssen, und für $x = 4$, $y = 6$ ist, so müssen die Coefficienten a, b, c so beschaffen sein, dass die Function $a + bx + cx^3$ für $x = 4$ auch $y = 6$ giebt. Dies giebt uns die erste Bedingungsgleichung (1). Da ferner für $x = 4$, $\frac{dy}{dx} = \frac{3}{4}$ und auch $\frac{dy}{dx} = \frac{3}{4}$ sein soll, so giebt dies die zweite Bedingungsgleichung (2). Weil ferner für $x = 4$, $\frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{3}{32}$, so giebt uns dies noch eine dritte Bedingungsgleichung (3), und mehr kann man hier nicht aufstellen.

$$6 = a + 4b + 64c \cdots\cdots\cdots\cdots (1)$$

$$\tfrac{3}{4} = b + 48c \cdots\cdots\cdots\cdots (2)$$

$$-\tfrac{3}{32} = 24c \cdots\cdots\cdots\cdots (3)$$

Aus diesen drei Bedingungsgleichungen findet man nun $c = -\frac{1}{256}$, $b = \frac{15}{16}$, $a = \frac{5}{2}$. Die gesuchte parabolische Linie ist also:

$$y = \tfrac{5}{2} + \tfrac{15}{16}x - \frac{x^3}{256}$$

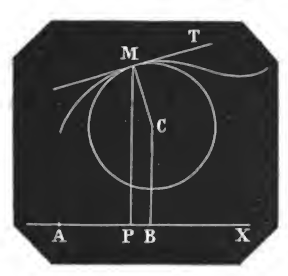
Setzt man hierin $x = 4$, so ist für diesen Werth von x, ebenso wie für die Parabel $y = \sqrt{9x}$, die Ordinate y=6, $\frac{dy}{dx} = \frac{15}{16} - \frac{3x^2}{256} = \frac{3}{4}$ $\frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{2x}{128} = -\frac{3}{32}$.

Anmerkung. Aus diesem Beispiele erhellet wohl, dass, weil eine Berührung zweiten Grades auf drei Bedingungsgleichungen führt, und die hier der Art nach gegebene Linie $y = a + bx + cx^3$ nur drei zu bestimmende Coefficienten, a, b, c, enthält, hier auch keine Berührung höhern Grades gefordert werden kann. Hätte jedoch die der Art nach gegebene Linie vier unbestimmte Coefficienten, wäre sie z. B. in dieser Form gegeben: $y = \alpha + \beta x + \gamma x^2 + \delta x^3$, so hätte man noch die dritten Differential-Quotienten einander gleich setzen können, man hätte dann zur Bestimmung der vier Coefficienten α, β, γ, δ auch vier Bedingungsgleichungen gehabt, und die Linie würde mit der Parabel eine Berührung dritten Grades eingegangen sein.

128.

Von Wichtigkeit, namentlich für die höhere Mechanik, ist es nun, denjenigen Kreis zu bestimmen, der mit einer gegebenen krummen Linie in einen bestimmten Punct derselben die möglichst innigste Berührung eingeht. Dieser Kreis wird Krümmungskreis, und sein Radius Krümmungshalbmesser genannt.

Um für die Berechnung desselben, in besondern Fällen, gleich eine allgemeine Formel abzuleiten, sei allgemein $y = F(x)$ die gegebene krumme Linie und x, y die gegebenen Coordinaten des Punctes M, für welchen der Krümmungskreis bestimmt werden soll.



Denkt man durch M eine Berührungslinie und eine Normallinie gelegt, so kann man offenbar aus unzähligen Puncten der Normallinie Kreise beschreiben, welche alle in M eine gemeinschaftliche Tangente haben. Unter diesen unzähligen Kreisen muss es nun einen geben, der im Puncte M die innigste Berührung mit der gegebenen Linie $y = F(x)$ eingeht. Eine Methode, ihn genau zu bestimmen, hat schon der vorhergehende § verrathen.

129.

Man setze nämlich, auf dieselbe Abscissenlinie und denselben Anfangspunct A bezogen, die durch $M(x,y)$ bestimmten, aber unbekannten Mittelpuncts-Coordinaten des gesuchten Kreises: $AB = \alpha$, $CB = \beta$, und den unbekannten Radius (Krümmungshalbmesser) $CM = \varrho$, so ist, wenn man mit y die laufende Ordinate des Kreises bezeichnet: $(\mathrm{y} - \beta)^2 + (x - \alpha)^2 = \varrho^2$ die Gleichung desselben.

Bezeichnen wir Kürze halber, die Differential-Quotienten der gegebenen Gleichung $y = F(x)$ mit p, $q \cdots$, so haben wir, ganz wie in § 107: *)

$$y = F(x) \qquad \mathrm{y} = \beta + [\varrho^2 - (x-\alpha)^2]^{\frac{1}{2}}$$

$$\frac{dy}{dx} = p \qquad \frac{d\mathrm{y}}{dx} = -\frac{x-\alpha}{[\varrho^2 - (x-\alpha)^2]^{\frac{1}{2}}}$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = q \qquad \frac{d^2\mathrm{y}}{dx^2} = -\frac{\varrho^2}{[\varrho^2 - (x-\alpha)^2]^{\frac{3}{2}}}$$

Weiter brauchen wir nicht zu differentiiren, weil die allgemeine Gleichung des Kreises nur drei zu bestimmende Constanten, α, β, ϱ, enthält.

Der Kreis kann deshalb mit einer krummen Linie, $y = F(x)$, (im Allgemeinen) auch nur eine Berührung zweiten Grades eingehen. Die drei Bedingungsgleichungen zur Bestimmung der drei Constanten α, β, ϱ sind hier also (indem für den bestimmten Punct $M(x, y)$ der krummen Linie $y = F(x)$, x, y, p, q gegebene Grössen sind, und $\mathrm{y} = y$; $\frac{d\mathrm{y}}{dx} = \frac{dy}{dx} = p$; $\frac{d^2\mathrm{y}}{dx^2} = \frac{d^2y}{dx^2} = q$ sein muss):

$$\beta + [\varrho^2 - (x-\alpha)^2]^{\frac{1}{2}} = y \cdots\cdots\cdots\cdots (1)$$

$$-\frac{x-\alpha}{[\varrho^2 - (x-\alpha)^2]^{\frac{1}{2}}} = p \cdots\cdots\cdots\cdots (2)$$

$$-\frac{\varrho^2}{[\varrho^2 - (x-\alpha)^2]^{\frac{3}{2}}} = q \cdots\cdots\cdots\cdots (3)$$

*) § 130 lehrt eine kürzere Ableitung des Krümmungshalbmessers.

Um hieraus α und β, oder worauf es eigentlich nur ankommt, ϱ zu finden, addire man zu der zuvor quadrirten zweiten Gleichung auf beiden Seiten 1, so kommt

$$\frac{\varrho^2}{\varrho^2 - (x-\alpha)^2} = 1 + p^2 \cdots\cdots\cdots\cdots (4)$$

$$\frac{\varrho^3}{[\varrho^2 - (x-\alpha)^2]^{\frac{3}{2}}} = (1+p^2)^{\frac{3}{2}} \cdots\cdots\cdots (5)$$

Dividirt man (5) durch (3), so hat man:

$$\varrho = -\frac{(1+p^2)^{\frac{3}{2}}}{q}$$

Wollte man zur vollständigen Bestimmung des Krümmungskreises, ausser seinem Radius ϱ, auch noch die Coordinaten α, β seines Mittelpunctes haben, so giebt die Gleichung (4), durch (3) dividirt:

$$[\varrho^2 - (x-\alpha)^2]^{\frac{1}{2}} = -\frac{1+p^2}{q} \cdots\cdots\cdots\cdots (6)$$

Aus (1) folgt: $[\varrho^2 - (x-\alpha)^2]^{\frac{1}{2}} = y - \beta$

mithin: $$y - \beta = -\frac{1+p^2}{q} \cdots\cdots\cdots\cdots (7)$$

Die Gleichung (2) mit (6) multiplicirt, kommt:

$$x - \alpha = p\,\frac{(1+p^2)}{q} \cdots\cdots\cdots\cdots (8)$$

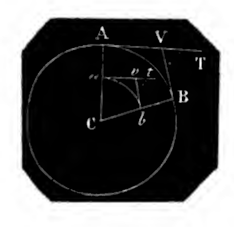
Aus (7) und (8) folgen nun die durch die gegebenen Grössen x, y, p, q für den Punct $M(x, y)$ bestimmten Werthe von α und β, nämlich:

$$\alpha = x - p \cdot \frac{(1+p^2)}{q}$$

$$\beta = y + \frac{1+p^2}{q}$$

130.

Denkt man sich eine krumme Linie durch die Bewegung eines Punctes beschrieben, so ist die augenblickliche, sich stetig ändernde Richtung desselben an irgend einer Stelle A oder B,



durch die daselbst gedachte Berührungslinie gegeben. Hat der Punct A den Weg AB (ohne Wendungspunct, Spitze etc. gedacht) durchlaufen, so ist die Grösse der Richtungsänderung durch den Winkel ACB gegeben, den die beiden, durch A und B gehenden Normallinien bilden, indem dieser Winkel dem bei V gleich ist.

Je grösser nun das Bestreben des beschreibenden Punctes A ist, von seiner augenblicklichen Richtung in A abzuweichen, je mehr krümmt sich offenbar die Linie an dieser Stelle. Wäre dieses Krümmungsbestreben in allen Puncten immer dasselbe (constant), mithin die Richtungsänderung des beschreibenden Punctes für gleich lange Bögen gleich, und folglich der Länge des durchlaufenen Weges proportional, so würde die krumme Linie überall von gleichförmiger Krümmung sein. Diese Eigenschaft hat offenbar der Kreis, aber auch nur der Kreis. Für jede andere krumme Linie ist das Krümmungsbestreben (die Krümmung) von Punct zu Punct veränderlich.

In Betreff der Kreise, kommt man leicht von selber zu der Einsicht, dass sich ihre Krümmungen umgekehrt wie ihre Radien verhalten. Denn beschreiben die Puncte A und *a* zwei concentrische Kreise, so sind die Puncte in B und *b* angekommen, um gleich viel von ihrer anfänglichen Richtung abgewichen. Da nun aber die Länge der Bögen zu gleichen Winkeln am Mittelpunct sich wie die Radien verhalten, so muss auch das constante Krümmungsbestreben des Puncts *a* so viel mal stärker sein, als der Bogen *ab* kleiner als AB, oder als der Radius *ac* kleiner als AC ist.

Betrachten wir demnach die Krümmung eines Kreises, dessen Radius $= 1$ ist, als Einheit, so sind die Krümmungen der Kreise, deren Radien $= 2, 3, \cdots r$ sind, durch die reciproken Werthe derselben $\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \cdots \frac{1}{r}$ gegeben.

131.

Mit diesem Krümmungsmaass für Kreise können wir nun aber auch die Krümmung jeder andern Linie messen, und uns dadurch von der Grösse dieser Krümmung in verschiedenen Puncten einen klaren Begriff verschaffen.

Wenn nämlich ein Kreis in einem gegebenen Punct, M(x, y), einer krummen Linie die möglichst innigste Berührung mit derselben eingeht (§ 128), so kann man daselbst einen sehr kleinen Theil (Element) der krummen Linie als mit einem eben so kleinen Bogen des Kreises zusammenfallend betrachten und annehmen, dass die krumme Linie in dem Puncte M dieselbe Krümmung, wie der erwähnte Kreis habe. Dieser sich bei M am genauesten anschmiegende Kreis, wird deshalb auch schicklicherweise Krümmungskreis und sein Radius Krümmungshalbmesser genannt, weil wir durch Vermittelung dieser Krümmungshalbmesser die Krümmungen in verschiedenen Puncten messen und mit einander vergleichen können. Je grösser der Krümmungshalbmesser, je schwächer die Krümmung und umgekehrt.

Sowohl der Radius ϱ, als auch die Mittelpuncts-Coordinaten α, β des Krümmungskreises für einen gegebenen Punct, M(x, y), einer beliebigen krummen Linie, $y = \mathrm{F}(x)$, sind schon in § 129 gefunden, nämlich allgemein:

$$\varrho = \mp \frac{(1+p^2)^{\frac{3}{2}}}{q}$$

$$\alpha = x - \frac{p(1+p^2)}{q}$$

$$\beta = y + \frac{1+p^2}{q} \quad .$$

132.

1. Weil ϱ eine absolute Länge, also stets positiv ist, so muss man von dem doppelten Vorzeichen der graden Wurzel stets dasjenige nehmen, welches ϱ positiv giebt, also das obere, wenn die krumme Linie, wie hier bei der Ableitung angenommen, concav, mithin $q = \frac{d^2y}{dx^2}$ negativ ist (§ 115).

2. Ist $q = 0$, so ist $\varrho = \infty$ und die Krümmung $\frac{1}{\varrho} = 0$. Dies ist für alle Wendungspuncte der Fall, in deren Nähe p und q in Bezug auf x continuirlich bleiben.

Ist für einen besondern Werth der Abscisse, $q = \infty$, ohne dass die Berührungslinie senkrecht auf der Abscissenlinie steht (also p nicht $= \infty$ ist), so wird $\varrho = 0$ und die Krümmung unendlich.

4. Werden beide Differential-Quotienten, p und q, unendlich, so bestimmt man ϱ nach § 80.

5. Wird eine der Grössen p, q unstetig, so muss man die Sache unmittelbar untersuchen.

6. Weil der Krümmungshalbmesser ϱ nur eine Function von p und q ist, so müssen auch zwei krumme Linien, welche einen Punct, $M(x, y)$, gemein haben, und in welchem p und q für beiderlei krumme Linien gleichwerthig sind, für diesen Punct einerlei Krümmungskreis haben.

133.

Aufgabe 1. Den Krümmungshalbmesser der Parabel $y=\sqrt{ax}$ für den allgemein gegebenen Punct $M(x, y)$ zu bestimmen.

Auflösung. Man hat hier zuerst: $p=\frac{a^{\frac{1}{2}}}{2x^{\frac{1}{2}}}$; $q=-\frac{a^{\frac{1}{2}}}{4x^{\frac{3}{2}}}$. Setzt man diese Werthe von p und q in die allgemeine Formel für den Krümmungshalbmesser, so ist:

$$\varrho=\tfrac{1}{2}\sqrt{\frac{(a+4x)^3}{a}}$$

Für $x=0$ ist die stärkste Krümmung im Scheitel $\varrho=\frac{1}{2}a=$ dem halben Parameter. Für grösser werdende x wird ϱ immer grösser und die Krümmung also immer schwächer. Für $x=\infty$ ist $\varrho=\infty$. (Vergl. § 76, Anmerkung.)

Für $a=9$ und $x=4$ ist $\varrho=\frac{125}{6}$. Denselben Krümmungshalbmesser hat für $x=4$, auch die krumme Linie $y=\frac{5}{2}+\frac{15}{16}x-\frac{x^3}{256}$ (§ 132, 6 und § 127).

Aufgabe 2. Den Krümmungs-Halbmesser der Ellipse $y=\frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}$, als Function von x anzugeben.

Auflösung. Es ist hier:

$$\frac{dy}{dx}=-\frac{bx}{a(a^2-x^2)^{\frac{1}{2}}}=p;\quad \frac{d^2y}{dx^2}=-\frac{ab}{(a^2-x^2)^{\frac{3}{2}}}=q$$

$$\varrho=\frac{[a^4-(a^2-b^2)x^2]^{\frac{3}{2}}}{a^4b}$$

Für $x=0$ ist $\varrho=\frac{a^2}{b}$. Für $x=a$ ist $\varrho=\frac{b^2}{a}$.

Achtes Buch.

Differentiation verwickelter Functionen zweier veränderlichen Grössen.

134.

Verwickelte Functionen zweier veränderlichen Grössen, x, y, pflegt man in der Regel auf Null reducirt zu denken, und dann allgemein durch $F(x, y) = 0$ zu bezeichnen. Dass man auch solche verwickelte Functionen, die man entweder auf die abhängig veränderliche Grösse nicht reduciren kann, oder auch zu grosser Weitläufigkeiten halber nicht reduciren will, dennoch der Differentiation unterwerfen und dadurch den Differential-Quotienten $\frac{dy}{dx}$ (wenn auch nur als Function von x und y zugleich) bestimmen kann, werden die folgenden §§ zeigen.

135.

Wenn man auch die verwickelte Gleichung $F(x, y) = 0$ nicht auf die abhängig veränderliche Grösse y reduciren kann, so kann man sie sich doch darauf reducirt und also auch construirt denken. Denkt man sich durch einen beliebigen Punct, $M(x, y)$, eine Berührungslinie gelegt, so kann man nach der trigonometrischen Tangente des Berührungswinkels oder, was dasselbe ist, nach dem ersten Differential-Quotienten $\frac{dy}{dx}$ fragen. Die Gleichung:

$$F(x, y) = 0 \cdots\cdots\cdots\cdots (1)$$

verlangt: zu einem beliebigen Werth von x, den zugehörigen Werth (Werthe) von y zu bestimmen, welcher der Gleichung (1) Genüge leistet (annullirt). Die Ordinate y ist eine Function von x. Denkt man sich die Gleichung (1) auf y reducirt, und nimmt für den Augenblick an, es sei $y = f(x)$, so muss, wenn diese Function von x in die Gleichung (1) statt y gesetzt wird, die resultirende Gleichung:

$$F[x, f(x)] = 0 \cdots\cdots\cdots\cdots (2)$$

offenbar für jeden Werth von x identisch Null werden, mithin auch, wenn man $x + \Delta x$ statt x setzt,*) weil sowohl die constanten, als veränderlichen Grössen sich gegenseitig tilgen. Dann hat man auch:

$$F[x + \Delta x,\ f(x + \Delta x)] = 0 \cdots\cdots\cdots (3)$$

oder wenn man entwickelt:

$$F[x, f(x)] + F'[x, f(x)] \cdot \Delta x + M\Delta x^2 + \cdots\cdots = 0$$

oder auch, weil das Glied $F[x, f(x)]$ ja $= 0$ ist, und weggelassen werden kann:

$$F'[x, f(x)] \cdot \Delta x + M\Delta x^2 + N\Delta x^3 + \cdots\cdots = 0$$

Diese Gleichung muss für jedes Δx bestehen und müssen deshalb die Coefficienten von Δx, $\Delta x^2, \cdots$ jeder für sich $= 0$ sein. (Anal. § 64, Anmkg.) Nun ist aber das erste Glied dieser Reihe, nämlich: $F'[x, f(x)]\Delta x = 0$ oder $F'[x, f(x)]dx$, offenbar das Differential von $F[x, f(x)] = 0$.

Hieraus folgt nun aber, dass wenn man sich wieder y statt seines Stellvertreters, $f(x)$, gesetzt denkt, und die Gleichung $F(x, y) = 0$ so differentiirt, als wenn auch y statt abhängig,

*) Sei zur Erläuterung dieses Hülfssatzes:

$$F(x, y) = y^2 - 2xy + x^2 - a^2 = 0$$

Aus dieser Gleichung (weil nur vom zweiten Grade) folgt leicht, dass $y = x \pm a = f(x)$ ist, mithin ist hier:

$F[x, f(x)] = (x \pm a)^2 - 2x(x \pm a) + x^2 - a^2 = 0$ (identisch Null.)

$F[x + \Delta x, f(x + \Delta x] = (x + \Delta x \pm a)^2 - 2(x + \Delta x)(x + \Delta x \pm a) + (x + \Delta x)^2 - a^2 = 0$

absolut veränderlich wäre, man auch das Differential $= 0$ setzen muss. *) Man habe z. B.:

$$x^6 y^5 - e^y - cx^4 + h = 0.$$

Diese Gleichung lässt sich nicht auf y reduciren. Dennoch ist y durch x bestimmt und man kann annehmen, es sei $y = f(x)$ und folglich:

$$x^6 \cdot [f(x)]^5 - e^{f(x)} - cx^4 + h = 0$$

Die linke Seite muss für jeden Werth von x, $= 0$ und wie wir gesehen haben, auch das Differential $= 0$ sein; das Differential ist aber:

$$[f(x)]^5 \cdot 6x^5 dx + x^6 \cdot 5[f(x)]^4 \cdot f'(x) dx - e^{f(x)} f'(x) dx - 4cx^3 dx = 0$$

oder $[f(x)]^5 6x^5 dx + x^6 \cdot 5[f(x)]^4 \cdot d \cdot f(x) - e^{f(x)} d \cdot f(x) - 4cx^3 dx = 0$

Es ist also auch, weil $f(x) = y$, mithin: $dy = f'(x) dx = d \cdot f(x)$

$$y^5 \cdot 6x^5 dx + x^6 \cdot 5y^4 dy - e^y dy - 4cx^3 dx = 0$$

$$(5x^6 y^4 - e^y) dy + (6x^5 y^5 - 4cx^3) dx = 0$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{4cx^3 - 6x^5 y^5}{5x^6 y^4 - e^y}$$

136.

Im vorhergehenden § wäre also bewiesen, **) dass man, um eine verwickelte Gleichung, $F(x, y) = 0$, zu differentiiren, nur so zu verfahren braucht, als wenn beide Grössen x, y absolut (unabhängig) veränderlich wären, oder was dasselbe ist: Man differentiire die Gleichung $F(x, y) = 0$ einmal, indem man y veränderlich und x als constant und dann dieselbe noch einmal,

---

*) Aus: $(x \pm a)^2 - 2x(x \pm a) + x^2 - a^2 = 0$ folgt z. B.:

$$2(x \pm a) . d(x \pm a) - 2x . d(x \pm a) - 2(x \pm a) dx + 2x dx = 0$$

und wenn man wieder y statt $x \pm a$ setzt:

$$2y dy - 2x . dy - 2y dx + 2x dx = 0$$

$$(y - x) dy - (y - x) dx = 0$$

$$\frac{dy}{dx} = 1$$

**) In § 137 wird noch ein anderer Beweis gegeben.

indem man x als veränderlich und y als constant betrachtet, und setze die Summe beider Differentiale $= 0$.

Diese allgemeine Regel pflegt man durch folgende drei verschiedene Bezeichnungen anzudeuten: Wenn nämlich $F(x,y) = 0$, so ist:

$$F'_y(x, y) \cdot dy + F'_x(x, y) \cdot dx = 0$$

$$\left(\frac{d \cdot F(x,y)}{dy}\right) dy + \left(\frac{d \cdot F(x,y)}{dx}\right) dx = 0$$

$$\left(\frac{dF}{dy}\right) dy + \left(\frac{dF}{dx}\right) dx = 0$$

wo also $\left(\frac{d \cdot F(x,y)}{dy}\right)$ oder kürzer $\left(\frac{dF}{dy}\right)$ oder $F'_y(x, y)$, andeutet, dass von $F(x,y)$ das Differential in Bezug auf y genommen werden soll.

137.

Zweiter Beweis. Wenn auch die Gleichung:

$$F(x,y) = 0 \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (1)$$

sich nicht auf die abhängig veränderliche Grösse y reduciren lässt, so sieht man doch, dass es für ein beliebiges x ein zugehöriges y geben muss, welches der Gleichung Genüge leistet (sie annullirt), und dass, wenn man diesem x (Abscisse) ein Wachsthum Δx beilegt, auch y (Ordinate) ein Wachsthum Δy bekommen muss, und dass dann beide zusammengehörigen Werthe (Coordinaten) $x + \Delta x$ und $y + \Delta y$ der Gleichuug:

$$F(x + \Delta x,\ y + \Delta y) = 0 \cdots\cdots\cdots\cdots (2)$$

wieder Genüge leisten (einen andern Punct der krummen Linie bestimmen), d. h. wenn x und y zwei zusammengehörige Werthe sind, und man setzt in Gleichung (1) $x + \Delta x$ statt x, so muss man nothwendig auch $y + \Delta y$ statt y setzen und dann alle Glieder in (2) nach Potenzen der Incremente Δx, Δy entwickeln. Diese Entwickelung kann geschehen, indem man erst alle Functionen von $x + \Delta x$ nach Potenzen von Δx entwickelt, dann in der erhaltenen nach Potenzen von Δx fortschreitenden Reihe auch noch die Functionen von $y + \Delta y$ entwickelt oder, was offenbar dasselbe ist: wir setzen in (1) $x + \Delta x$ statt x und entwickeln

erst $F(x + \Delta x, y)$ nach Potenzen von Δx, indem wir y einstweilen als constant betrachten.

Der Taylor'sche Lehrsatz giebt:

$$F(x+ \Delta x, y) = F(x, y) + F'_x(x, y) \cdot \Delta x + F''_x(x, y) \cdot \frac{\Delta x^2}{1 \cdot 2} + \cdots$$

weil nun aber auch y sich ändert und allenthalben $y + \Delta y$ statt y gesetzt werden muss, so hat man:

$$F(x+\Delta x, y+\Delta y) = F(x, y+\Delta y) + F'_x(x, y+\Delta y) . \Delta x + F''_x(x, y+\Delta y) \cdot \frac{\Delta x^2}{1 \cdot 2} + \cdots = 0$$

Entwickeln wir jetzt noch jedes Glied der rechten Seite nach Potenzen von Δy (indem man jetzt x als constant betrachtet, so erhält man:

$$F(x, y + \Delta y) = F(x, y) + F'_y(x, y) \cdot \Delta y + F''_y(x, y) \cdot \frac{\Delta y^2}{1 \cdot 2} + \cdots$$

$$F'_x(x, y + \Delta y) \Delta x = F'_x(x, y) \Delta x + F''_{xy}(x, y) \Delta x \Delta y + \cdots$$

$$F''_x(x, y + \Delta y) \cdot \frac{\Delta x^2}{1 \cdot 2} = F''_x(x, y) \cdot \frac{\Delta x^2}{1 \cdot 2} + F'''_{xy}(x, y) \cdot \frac{\Delta x^2}{1 \cdot 2} \cdot \Delta y + \cdots$$

$$\vdots \qquad\qquad \vdots$$

Werden diese Entwickelungen in obige Gleichung substituirt, so ist:

$$F(x+\Delta x, y+\Delta y) = \left.\begin{array}{r} F(x,y) + F'_y(x, y) \cdot \Delta y + F''_y(x,y) \cdot \dfrac{\Delta y^2}{1 \cdot 2} + \cdots \\ + F'_x(x, y) \cdot \Delta x + F''_{xy}(x, y) \cdot \Delta x \cdot \Delta y + \cdots \\ + F''_x(x, y) \dfrac{\Delta x^2}{1 \cdot 2} + \cdots \end{array}\right\} = 0$$

oder weil das erste Glied $F(x, y) = 0$ ist und wegfällt, so hat man für die Beziehung zwischen den Incrementen Δx und Δy die Gleichung:

$$F'_y(x, y) \Delta y + F'_x(x, y) \Delta x + F''_y(x, y) \frac{\Delta y^2}{1 \cdot 2} + \cdots = 0 \cdots (3)$$

Diese Gleichung ist aber ebenfalls verwickelt und lässt sich deshalb nicht auf Δy reduciren.

Da es nun aber auch gar nicht darauf ankommt, Δy selbst (das Increment der Ordinate) zu erhalten, sondern nur den Grenzwerth des Quotienten $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ für $\Delta x = 0$, nämlich den ersten Differential-Quotienten $\frac{dy}{dx}$ zu wissen nöthig haben, so kann man, um diesen zu erhalten, annehmen, es sei $\Delta y = k\Delta x$ und die Differenzen-Gleichung (3), indem man statt der Potenzen Δy^2, $\Delta y^3, \cdots$, $k^2\Delta x^2$, $k^3\Delta x^3, \cdots$ gesetzt denkt, auch so schreiben:

$$F'_y(x, y)\Delta y + F'_x(x, y)\Delta x + F''_y(x, y)\cdot\frac{k^2\Delta x^2}{1\cdot 2} + \cdots\cdot = 0$$

hieraus folgt nun:

$$F'_y(x, y)\cdot\frac{\Delta y}{\Delta x} + F'_x(x, y) + F''_y(x, y)\cdot\frac{k^2\cdot\Delta x}{1\cdot 2} + \cdots\cdot = 0$$

Lässt man jetzt, um auf die erwähnte Grenze zu kommen, Δx bis zu 0 convergiren, so fallen alle in Δx, $\Delta x^2 \cdots\cdot$ multiplicirten Glieder weg, und für $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ muss dann $\frac{dy}{dx}$ (die Grenze des Quotienten $\frac{\Delta y}{\Delta x}$) gesetzt werden, und man hat dann wie in § 136.

$$F'_y(x, y)\cdot\frac{dy}{dx} + F'_x(x, y) = 0$$

$$F'_y(x, y)\cdot dy + F'_x(x, y)\, dx = 0$$

$$\left(\frac{dF}{dy}\right) dy + \left(\frac{dF}{dx}\right) dx = 0$$

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{\left(\frac{dF}{dx}\right)}{\left(\frac{dF}{dy}\right)}$$

138.

* Dritter Beweis. Nach der Infinitesimalmethode ergiebt sich die gegebene Regel, nach welcher man eine verwickelte Function, $F(x, y) = 0$, differentiirt, folgendermaassen viel einfacher und natürlicher: denkt man sich nämlich zu einem beliebigen x das davon abhängige y so bestimmt, dass beide Grössen der gegebenen Gleichung $F(x, y) = 0$ Genüge leisten und man

lässt nun (um zu einem andern Punct der entsprechenden Linie zu gelangen) das x um Δx wachsen, so muss auch y um ein solches Increment Δy zunehmen, dass die Gleichung $F(x + \Delta x,\ y + \Delta y) = 0$ besteht (weil $x + \Delta x$ und $y + \Delta y$ die von einander abhängigen Coordinaten sind). Denkt man sich nun die linke Seite nach den Lehren der Analysis entwickelt, so muss erstlich $F(x, y)$ wieder erscheinen, welche (weil $= 0$) wegfällt, ausserdem erscheinen Glieder, welche mit den Incrementen Δx, Δy, so wie auch mit Potenzen und Producten derselben als Factoren behaftet sind und die verwickelte, auf 0 reducirte Beziehung zwischen den Incrementen ausdrücken. Lässt man nun, um auf das characteristische Dreieck zu kommen, Δx, und also auch Δy, bis zu Infinitesimalgrössen dx, dy convergiren, so verschwinden hiegegen die höheren Potenzen dx^2, dy^2,···· wie auch die Producte $dxdy$, $dxdy^2$ etc., so dass also nothwendig eine homogene Gleichung übrig bleibt, in welcher jedes Glied ein unendlich Kleines erster Ordnung ist. Diese Gleichung erhält man offenbar durch einfache Differentiation der gegebenen Gleichung $F(x, y) = 0$, indem man hiebei die abhängige Grösse y, formell wie eine absolut veränderliche behandelt.

139.

Der aus einer verwickelten Function gezogene Differential-Quotient $\frac{dy}{dx}$ ist offenbar eine Function von den beiden veränderlichen Grössen x, y, und lässt sich also auch nur für solche gegebene Werthe von x bestimmen, für welche zugleich der Werth (oder die Werthe) der abhängigen Grösse y aus der ursprünglichen Gleichung $F(x, y) = 0$ gefunden werden kann. Gehören dann zu einem gegebenen Werth von x verschiedene Werthe von y, so hat der Differential-Quotient ebenso viele verschiedene Werthe.

Beispiel. Man hat aus der Gleichung:

$$y^2 - 4xy + x^2 - 4 = 0 \cdots\cdots\cdots\cdots (1)$$

$$2ydy - 4xdy - 4ydx + 2xdx = 0$$

$$(2y - 4x)dy - (4y - 2x)dx = 0$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{2y - x}{y - 2x} \cdots\cdots\cdots\cdots (2)$$

Weil zu jedem Werth von x zwei Werthe von y gehören, so muss nothwendig auch der Differential-Quotient zwei Werthe haben. Setzt man z. B. in (1) $x=2$, so wird $y^2-8y=0$, woraus: $y=0$ und $y=8$, mithin $\frac{dy}{dx}=\frac{0-2}{0-4}=\frac{1}{2}$ und $\frac{dy}{dx}=\frac{16-2}{8-4}=3\frac{1}{2}$. Reduciren wir (weil es hier möglich ist) (1) auf y, so ist:

$$y=2x\pm\sqrt{4+3x^2}\cdots\cdots\cdots\cdots(3)$$

Diesen Ausdruck für y in (2) substituirt, ist:

$$\frac{dy}{dx}=2\pm\frac{3x}{\sqrt{4+3x^2}}$$

140.

Um die successiven oder höheren Differentialen und Differential-Quotienten einer verwickelten Function $F(x, y)=0$ zu erhalten, wollen wir zuerst einen besondern Fall betrachten. Es sei:

$$y^2-4xy+x^2-4=0\cdots\cdots\cdots\cdots(1)$$

so ist: $$(2y-4x)dy-(4y-2x)dx=0\cdots\cdots\cdots\cdots(2)$$

$$(y-2x)\frac{dy}{dx}-2y+x=0$$

$$(y-2x)\cdot p-2y+x=0\cdots\cdots\cdots\cdots(3)$$

In letzterer Gleichung ist $p=\frac{dy}{dx}$ zwar eine Function von x und y zugleich. Weil nun aber y eine Function von x (durch x bestimmt) ist, so kann man offenbar auch p als eine Function von x allein betrachten.

Denkt man sich nun in (3) statt y und p ihre Functionen von x, [$f(x)$ und $\varphi(x)$], substituirt, so muss die Gleichung (3) für jeden Werth von x identisch Null werden, mithin auch das Differential derselben $=0$ sein. Man kann also die Gleichung (3) aufs Neue wieder differentiiren, indem man dabei die Grössen x, y, p formell als unabhängig betrachtet, und das Differential $=0$ setzt. Wir haben also aus (3):

$$p(dy - 2dx + (y - 2x)dp - 2dy + dx = 0$$

$$p\left(\frac{dy}{dx} - 2\right) + (y - 2x)\frac{dp}{dx} - 2\frac{dy}{dx} + 1 = 0$$

oder weil $p = \frac{dy}{dx}$, und $\frac{dp}{dx} = \frac{d^2y}{dx^2}$ ist, (§ 38)

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 - 4\frac{dy}{dx} + (y - 2x)\cdot\frac{d^2y}{dx^2} + 1 = 0$$

Man beachte, dass man in formeller Hinsicht diese Gleichung auch unmittelbar aus (2), nämlich aus:

$$y\cdot dy - 2xdy - 2y\cdot dx + x\cdot dx = 0$$

erhält, indem man beim Differentiiren y und dy als Function von x, und dx als einen constanten Factor betrachtet und d^2y statt $d\cdot dy$ setzt, und also nicht nöthig hat, die Gleichung (2) erst auf die Form (3) zu bringen. Man hat nämlich durch Differentiation vorstehender Gleichung:

$$dy\cdot dy + yd^2y - 2dy\cdot dx - 2xd^2y - 2dx\cdot dy + dx\cdot dx = 0$$

$$dy^2 + (y - 2x)d^2y - 4dxdy + dx^2 = 0 \cdots\cdots (4)$$

$$(y - 2x)\ \frac{d^2y}{dx^2} + \frac{dy^2}{dx^2} - 4\frac{dy}{dx} + 1 = 0$$

Diese Gleichung drückt nun die Beziehung aus, welche zwischen x, y und dem ersten und zweiten Differential-Quotienten Statt findet.

Will man den zweiten Differential-Quotienten $\frac{d^2y}{dx^2}$ durch eine Function von x, y allein ausdrücken, so muss man für $\frac{dy}{dx}$ seinen Werth aus (2) ziehen $\left(\text{nämlich } \frac{dy}{dx} = \frac{2y - x}{y - 2x}\right)$ und in vorstehende Gleichung substituiren, alsdann hat man:

$$(y - 2x)\ \frac{d^2y}{dx^2} + \frac{(2y - x)^2}{(y - 2x)^2} - 4\,\frac{(2y - x)}{y - 2x} + 1 = 0$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{3(y^2 - 4xy + x^2)}{(y - 2x)^3}$$

Man könnte nun offenbar diese Gleichung, oder noch bequemer die Gleichung (4), nämlich:

$$dy^2 + y \cdot d^2y - 2dy \cdot dx - 2xd^2y - 2dxdy + dx^2 = 0$$

wiederholt differentiiren (indem man y, dy, d^2y als Functionen von x, und dx als einen constanten Factor betrachtet) und auf dieselbe Weise auch den dritten, vierten etc. Differential-Quotienten bestimmen.

141.

Sei nun ganz allgemein:

$$F(x, y) = 0$$

die verwickelte Function, so ist nach festgesetzter Bezeichnung: *)

$$\left(\frac{dF}{dx}\right) dx + \left(\frac{dF}{dy}\right) dy = 0.$$

$$\left(\frac{d^2F}{dx^2}\right) dx^2 + \left(\frac{d^2F}{dxdy}\right) dxdy + \left(\frac{d^2F}{dydx}\right) dydx + \left(\frac{d^2F}{dy^2}\right) dy^2 + \left(\frac{dF}{dy}\right) d^2y = 0$$

und wenn man durch dx^2 dividirt und zugleich das zweite und dritte Glied, welche gleich sind, in Eins zusammenzieht:

$$\left(\frac{d^2F}{dx^2}\right) + 2\left(\frac{d^2F}{dxdy}\right)\frac{dy}{dx} + \left(\frac{d^2F}{dy^2}\right) \cdot \frac{dy^2}{dx^2} + \left(\frac{dF}{dy}\right) \cdot \frac{d^2y}{dx^2} = 0$$

---

*) Das Zeichen $\left(\frac{d^2F}{dx^2}\right)$ bedeutet: dass die Function $F(x, y) = 0$ zweimal nach x differentiirt worden. Ebenso bedeutet $\left(\frac{d^2F}{dxdy}\right)$, dass die Function $F(x, y) = 0$ einmal nach x, und dann das Resultat, in welchem man dx als constant betrachtet, wieder nach y differentiirt ist, oder auch umgekehrt. Es ist z. B., wenn $F(x, y) = x^3y^2 - a = 0$

$$\left(\frac{dF}{dx}\right) = 3x^2y^2dx; \qquad \left(\frac{d^2F}{dxdy}\right) = 6x^2ydxdy$$

$$\left(\frac{dF}{dy}\right) = 2x^3ydy; \qquad \left(\frac{d^2F}{dydx}\right) = 6x^2ydydx$$

142.

Beispiel. Man hat aus der Gleichung für das Cartesische Blatt: (Höhere Geometrie § 79)

$$y^3 - 3axy + x^3 = 0 \cdots\cdots\cdots\cdots (1)$$

$$y^2dy - axdy - aydx + x^2dx = 0 \cdots\cdots\cdots (2)$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{ay - x^2}{y^2 - ax}$$

Hier gehören zu jedem Werth von x (Null ausgenommen) drei Werthe zu y und $\frac{dy}{dx}$, die gleichzeitig alle drei reell, oder einer reell und die beiden andern imaginair sind. (Anal. § 113.)

1. Für $x = 0$ ist auch $y = 0$. Der Differential-Quotient $\frac{dy}{dx}$ aber $= \frac{0}{0}$. Um seinen wahren Werth zu finden, verfahren wir nach der § 81 gegebenen Regel, indem wir y als Function von x betrachten. Es ist darnach für $x = 0$, $y = 0$:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{ay - x^2}{y^2 - ax} = \frac{0}{0} = \frac{a\frac{dy}{dx} - 2x}{2y\frac{dy}{dx} - a} \quad \text{oder:}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{a\frac{dy}{dx} - 2x}{2y\frac{dy}{dx} - a}$$

$$2y \cdot \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 - 2a \cdot \frac{dy}{dx} = -2x$$

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 - \frac{a}{y} \cdot \frac{dy}{dx} = -\frac{x}{y}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{a \pm \sqrt{a^2 - 4xy}}{2y} = \frac{a \pm \left(a - \frac{2xy}{a} - \cdots\right)}{2y}$$

Es ist also für $x = 0$ und $y = 0$ für das obere Vorzeichen $\frac{dy}{dx} = \infty$, für das untere aber $\frac{dy}{dx} = 0$. Im Anfangspunct, der ein

Doppelpunct ist, steht also die eine Berührungslinie senkrecht auf der Abscissenlinie, die andere fällt mit ihr zusammen.

Für denjenigen Punct, für welchen $ay - x^2 = 0$, mithin $y = \frac{x^2}{a}$ ist, ist $\frac{dy}{dx} = 0$, und die Berührungslinie geht wieder parallel mit der Abscissenlinie. Um die Coordinaten dieser Puncte zu finden, wo nämlich $ay = x^2$ wird, setzen wir in (1) $\frac{x^2}{a}$ statt y, so ist $\frac{x^6}{a^3} - 2x^3 = 0$, woraus $x = 0$ und $x = a\sqrt[3]{2}$, mithin $y = 0$ und $y = a\sqrt[3]{4}$.

Um die Coordinaten der Puncte zu erhalten, in welchen die Berührungslinie senkrecht auf der Abscissenlinie steht, setzen wir den Nenner $y^2 - ax = 0$, mithin $x = \frac{y^2}{a}$. Dies in (1) substituirt, kommt: $y^3 - 3y^3 + \frac{y^6}{a^3} = 0$, woraus $y = 0$ und $y = a\sqrt[3]{2}$, mithin $x = 0$ und $x = a\sqrt[3]{4}$. Für diese Puncte ist $\frac{dy}{dx} = \infty$.

2. Um die etwaigen Asymptoten der krummen Linie zu bestimmen, hat man (§ 79):

$$AT = x - y \cdot \frac{y^2 - ax}{ay - x^2} = -\frac{(y^3 - 2axy + x^3)}{ay - x^2} = \frac{-axy}{ay - x^2}$$

$$AC = y - x \cdot \frac{ay - x^2}{y^2 - ax} = \frac{y^3 - 2axy + x^3}{y^2 - ax} = \frac{axy}{y^2 - ax}$$

Für $x = \infty$ ist $y = -\infty$. Daher $AT = -a$, $AC = -a$, wodurch die Lage der Asymptote bestimmt ist.

3. Um zu finden, ob für $x = a\sqrt[3]{2}$ und $y = a\sqrt[3]{4}$ $\left(\text{wo } \frac{dy}{dx} = 0 \text{ ist}\right)$ ein Maximum oder Minimum Statt findet, wollen wir den zweiten Differential-Quotienten berechnen. Die Gleichung (2), nochmals differentiirt, giebt:

$$2y \cdot dy^2 + y^2 \cdot d^2y - adydx - ax \cdot d^2y - adx \cdot dy + 2x \cdot dx^2 = 0$$

$$(y^2 - ax) \cdot d^2y + 2ydy^2 - 2adydx + 2xdx^2 = 0$$

$$(y^2 - ax) \cdot \frac{d^2y}{dx^2} + 2y \cdot \frac{dy^2}{dx^2} - 2a\frac{dy}{dx} + 2x = 0 \cdots\cdots\cdots (3)$$

oder, indem wir für den ersten Differential-Quotienten seinen bereits gefundenen Werth substituiren:

$$(y^2 - ax)\cdot\frac{d^2y}{dx^2} + 2y\cdot\frac{(ay - x^2)^2}{(y^2 - ax)^2} - 2a\frac{ay - x^2}{y^2 - ax} + 2x = 0$$

$$(y^2 - ax)^3\cdot\frac{d^2y}{dx^2} - 6ax^2y^2 + 2x^4y + 2xy^4 + 2a^3xy = 0$$

Aus der gegebenen Gleichung (1) folgt:

$$y^3 = 3axy - x^3, \text{ also:}$$

$$2xy^4 = 6ax^2y^2 - 2x^4y, \text{ mithin:}$$

$$(y^2 - ax)^3\cdot\frac{d^2y}{dx^2} + 2a^3xy = 0$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{2a^3xy}{(y^2 - ax)^3}$$

Anmerkung. Wir haben hier den zweiten Differential-Quotienten der Uebung halber ganz allgemein bestimmt. Wollte man ihn aber bloss wegen der Entscheidung über Maximum oder Minimum für den speciellen Punct haben, in welchem $\frac{dy}{dx} = 0$ ist, so hätte man ihn leichter aus (3) erhalten können, indem man die in $\frac{dy}{dx}$ und $\frac{dy^2}{dx^2}$ multiplicirten Glieder (weil $=0$) weglässt. Für diesen speciellen Punct ist dann offenbar: $\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{-2x}{y^2 - ax}$

Für $x = a\sqrt[3]{2}$ ist die Ordinate $y = a\sqrt[3]{4}$ im Zustande des Maximum, weil für diese Werthe von x, y, der erste Differential-Quotient $\frac{dy}{dx} = 0$ und der zweite $\frac{d^2y}{dx^2}$ negativ ist. Wegen $\frac{dy}{dx} = \infty$ sehe man § 118, 3.

Neuntes Buch.

Vertauschung der unabhängig veränderlichen Grösse.

143.

Es kommt manchmal vor, dass zwei abhängig veränderliche Grössen x, y (z. B. Coordinaten) als Functionen einer und derselben veränderlichen dritten Grösse, t, gegeben sind*), und es handelt sich nun darum, eine allgemeine Regel zu finden, nach welcher man in solchem Falle, ohne die dritte Grösse t eliminiren zu brauchen, dennoch die in Bezug auf x genommenen Differential-Quotienten $\frac{dy}{dx}, \frac{d^2y}{dx^2} \cdots\cdots$ als Functionen von t ausdrücken kann.

144.

Es seien zu dem Ende sowohl y als x stetige Functionen von t, nämlich allgemein:

$$y = F(t) \cdots\cdots\cdots\cdots (1)$$
$$x = f(t) \cdots\cdots\cdots\cdots (2)$$

Der leichteren Vorstellung halber denke man sich die absolut veränderliche Grösse t eliminirt, und dadurch y als eine gesonderte

*) Ein solches Beispiel findet sich in der höheren Geometrie § 79. In der höheren Mechanik werden die Coordinaten einer Bahn oft als Functionen der Zeit ausgedrückt.

Function von x hervorgehend. Es sei nämlich nach bewirkter Elimination von t*)

$$y = \varphi(x) \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (3)$$

Denkt man sich für t einen beliebigen Werth gesetzt, so sind dadurch, vermöge der Gleichungen (1) und (2), die zu einander gehörigen Werthe von x und y bestimmt, und es ist klar, dass man den zu x gehörigen Werth von y auch aus der als vorhanden fingirten Gleichung (3) hätte finden können, indem man darin den aus (2) für x erhaltenen Werth substituirt.

Lassen wir nun t um das Increment Δt wachsen, so werden auch x und y sich ändern, und es ist nach dem Taylor'schen Lehrsatz:

$$\Delta y = F'(t)\Delta t + F''(t) \cdot \frac{\Delta t^2}{1 \cdot 2} + \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (4)$$

$$\Delta x = f'(t) \cdot \Delta t + f''(t) \cdot \frac{\Delta t^2}{1 \cdot 2} + \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (5)$$

Lässt man nun in (3) die Grösse x sich um den aus (5) erhaltenen Werth Δx ändern, so wird auch in (3) y sich ebensoviel als vorhin ändern und man hat aus (3):

$$\Delta y = \frac{dy}{dx} \cdot \Delta x + \frac{d^2y}{dx^2} \cdot \frac{\Delta x^2}{1 \cdot 2} + \cdots$$

oder wenn man hierin — um die Differential-Quotienten $\frac{dy}{dx}$, $\frac{d^2y}{dx^2} \cdots$ als Functionen von t zu erhalten — für Δx den Werth aus (5) substituirt:

$$\Delta y = \frac{dy}{dx} \cdot \left[f'(t) \cdot \Delta t + f''(t) \cdot \frac{\Delta t^2}{1 \cdot 2} + \cdots\right] + \frac{1}{1 \cdot 2}\frac{d^2y}{dx^2}\left[f'(t)\Delta t + f''(t) \cdot \frac{\Delta t^2}{1 \cdot 2} + \cdots\right]^2 + \cdots$$

$$\Delta y = \frac{dy}{dx} f'(t) \cdot \Delta t + \left[\frac{dy}{dx} \cdot f''(t) + \frac{d^2y}{dx^2} \cdot \left(f'(t)\right)^2\right] \cdot \frac{\Delta t^2}{1 \cdot 2} + \cdots (6)$$

*) Sei z. B. $y = t^4$ und $x = t^2$, so ist $y = x^2$ und z. B. für $t = 2$ ist:
$y = 16$ « $x = 4$, $y = 16$ « für $\Delta t = 1$ ist:
$\Delta y = 65$ « $\Delta x = 5$, $\Delta y = 65$.

Die beiden für Δy erhaltenen Reihen (4) und (6) müssen für jedes Δt gleich sein, daher (Analysis § 64):

$$\frac{dy}{dx}\cdot f'(t) = \mathrm{F}'(t) \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (7)$$

$$\frac{dy}{dx}\cdot f''(t) + \frac{d^2y}{dx^2}[f'(t)]^2 = \mathrm{F}''(t) \cdots\cdots\cdots (8)$$

Aus der Gleichung (7) folgt:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\mathrm{F}'(t)}{f'(t)} \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (9)$$

Den für $\frac{dy}{dx}$ erhaltenen Werth in (8) substituirt, kommt:

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{f'(t)\cdot \mathrm{F}''(t) - \mathrm{F}'(t)\cdot f''(t)}{[f'(t)]^3} \cdots\cdots\cdots (10)$$

Man sieht leicht, wie man auf dieselbe Weise erforderlichen Falls auch die folgenden Differential-Quotienten $\frac{d^3y}{dx^3}, \frac{d^4y}{dx^4} \cdots$ als Functionen von t finden könnte, indem man bei den vorhergehenden Reihen noch das 3te, 4te $\cdots$ Glied berücksichtigt.

145.

Ehe wir weiter gehen, müssen wir zuvor noch auf zwei andere Schreibweisen aufmerksam machen. Weil nämlich sowohl x als y von t abhängig sind, so folgt aus:

$$y = \mathrm{F}(t) \quad \text{und} \quad x = f(t) \quad \text{dass:}$$

$$\frac{dy}{dt} = \mathrm{F}'(t) \qquad \frac{dx}{dt} = f'(t)$$

$$\frac{d^2y}{dt^2} = \mathrm{F}''(t) \qquad \frac{d^2x}{dt^2} = f''(t)$$

Setzt man diese Ausdrücke für $\mathrm{F}'(t)$, $f'(t) \cdots$ in die für die Differential-Quotienten gefundenen Formeln (9) und (10), so kann man dieselben auch so schreiben:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{\frac{dx}{dt} \cdot \frac{d^2y}{dt^2} - \frac{dy}{dt} \cdot \frac{d^2x}{dt^2}}{\left(\frac{dx}{dt}\right)^3}$$

oder, weil die Differential-Quotienten $\frac{dy}{dx}, \frac{d^2y}{dx^2}$ nur Functionen von t sind (weil im Zähler und Nenner die Divisoren $dt, dt^3 \cdots$ sich heben), so kann man die in Bezug auf x genommenen Differential-Quotienten $\frac{dy}{dx}, \frac{d^2y}{dx^2} \cdots$, indem wir jetzt dafür ihre einfacheren Zeichen $p, q \cdots$ setzen, auch so schreiben:

$$p = \frac{dy}{dx}$$

$$q = \frac{dx\,d^2y - dy\,d^2x}{dx^3}$$

$$\vdots$$

Man darf aber nicht vergessen, dass dies nur eine kürzere Schreibweise ist, und dass rechter Hand dx, d^2x, $dy \cdots$ nur als Stellvertreter für $f'(t)dt$, $f''(t)dt^2$, $F'(t)dt \cdots$ stehen. Linker Hand sind $p, q \cdots$ implicite Functionen von x, die aber durch Functionen von t ausgedrückt sind, indem rechter Hand $dt, dt^3 \cdots$ sich heben.

146.

* Wir können die Sache noch von einer andern Seite betrachten und die vorhergehenden Resultate durch die Infinitesimal-Methode auf einem viel kürzeren und natürlicherem Wege erhalten.

Es seien wieder x, y, die Coordinaten einer krummen Linie, jede aber als eine Function der willkürlich veränderlichen Grösse t gegeben. nämlich:

$$y = F(t) \cdots\cdots\cdots\cdots (1)$$

$$x = f(t) \cdots\cdots\cdots\cdots (2)$$

Für einen beliebigen Werth von t sind die Coordinaten x, y

und mithin auch ein Punct, M, der krummen Linie, so wie die Lage der dadurch gelegten Berührungslinie $\mathrm{tg}\,\tau = \frac{dy}{dx}$, die Subtangente $S_{t} = y\,\frac{dx}{dy}$, Krümmungshalbmesser $\varrho = \frac{(1+p^2)^{\frac{3}{2}}}{q}$ etc. bestimmt.

Könnte man aus der Gleichung (1) und (2) die Grösse t eliminiren, und y durch eine Function von x darstellen, so könnte man leicht p, q, so wie die fraglichen Grössen: Subtangente etc. berechnen, und als Functionen von x ausdrücken.

Angenommen aber, die Elimination von t sei nicht ausführbar, so frägt sich, ob man dann nicht die erforderlichen Differential-Quotienten p, q, mithin auch die anderen Grössen: Subtangente, Krümmungshalbmesser etc. als Functionen von t darstellen kann.

Der erste Differential-Quotient $p = \frac{dy}{dx}$ ist leicht gefunden. Die unmittelbare Differentiation der Gleichungen (1) und (2) giebt:

$$dy = F'(t)\,dt$$
$$dx = f'(t)\,dt$$

Denkt man sich nun dt, folglich auch dy, dx nicht als absolute Nullen, sondern als Infinitesimalgrössen, so hat die Division beider Differentialen dy, dx durch einander Sinn, und man hat (indem dt eliminirt wird) sogleich: *)

$$p = \frac{F'(t)}{f'(t)}$$

Hier ist also der erste Differential-Quotient p durch eine endliche gebrochene Function von t dargestellt, in welcher jedoch der Zähler oder Nenner auch constant sein kann.

Differentiirt man aufs Neue, so kommt:

$$dp = \frac{f'(t)\cdot F''(t)dt - F'(t)\cdot f''(t)\cdot dt}{[f'(t)]^2}$$

und durch $dx = f'(t)\cdot dt$ dividirt:

$$\frac{dp}{dx} = q = \frac{f'(t)\cdot F''(t) - F'(t)\cdot f''(t)}{[f'(t)]^3}$$

*) Nach der Grenzmethode giebt die unmittelbare Division: $\frac{0}{0} = \frac{F'(t)}{f'(t)}\cdot\frac{0}{0} = ?$

oder in üblicher Schreibweise, indem man $\frac{dy}{dx}$ statt $\frac{F'(t)}{f'(t)}$ $\left(\text{eigentlich statt } \frac{F'(t)dt}{f'(t)dt} = \frac{F'(t)}{f'(t)}\right)$ setzt, und nun $\frac{dy}{dx}$ nicht als ein Zeichen (wie nach der Grenzmethode geschehen müsste), sondern Zähler und Nenner als Functionen von t und dt betrachtet:

$$p = \frac{dy}{dx}$$

$$dp = \frac{dx \cdot d^2y - dy \cdot d^2x}{dx^2}$$

$$\frac{dp}{dx} = q = \frac{dx \cdot d^2y - dy \cdot d^2x}{dx^3}$$

$$\frac{dq}{dx} = r = \frac{dx^2\, d^3y - 3dx \cdot d^2x\, d^2y + 3dy\, d^2x^2 - dx\, dy\, d^3x}{dx^5}$$

147.

Als Anwendung des Vorhergehenden wollen wir jetzt noch die allgemeine Formel entwickeln, nach welcher man die Krümmungshalbmesser auch für Polarcurven bestimmen kann.

Sei deshalb (man zeichne sich die nöthige Figur) der gegebene Polarwinkel MAX $= \theta$, der zugehörige Radius vector AM $= r$ und r irgend eine Function von θ, nämlich:

$$r = F(\theta) \cdots\cdots\cdots (1)$$

Am leichtesten ist es hier nun, erst die rechtwinkligen Coordinaten AP $= x$, MP $= y$ des Punctes M, so wie den ersten und zweiten Differential-Quotienten p, q als Functionen von θ auszudrücken, und dann die für p und q erhaltenen Ausdrücke in die schon bekannte Formel für den Krümmungshalbmesser, nämlich in $\varrho = \mp \frac{(1+p^2)^{\frac{3}{2}}}{q}$ zu substituiren. Da nun

$$y = r \cdot \sin\theta \cdots\cdots\cdots (2)$$

$$x = r \cdot \cos\theta \cdots\cdots\cdots (3)$$

so hat man durch zweimalige Differentiation dieser Gleichungen, indem man y, x, als Functionen der absolut veränderlichen Grösse θ betrachtet: *)

---

*) Weil nach Gleichung (1), r eine gegebene Function von θ ist, nämlich $r = F(\theta)$, so hat man rechter Hand in (2) und (3) nur eine absolut veränderliche Grösse θ, nämlich: $y = F(\theta).\sin\theta$; $x = F(\theta).\cos\theta$, und wir schreiben nur Kürze halber r statt $F(\theta)$, dr statt $F'(\theta)d\theta$, d^2r statt $F''(\theta)d\theta^2$ etc.

$$dy \;= \sin\theta \cdot dr + r \cdot \cos\theta\, d\theta$$
$$dx \;= \cos\theta \cdot dr - r \sin\theta\, d\theta$$
$$d^2y = 2\cos\theta\, d\theta\, dr + \sin\theta \cdot d^2r - r\sin\theta \cdot d\theta^2$$
$$d^2x = -\,2\sin\theta\, d\theta \cdot dr + \cos\theta \cdot d^2r - r\cos\theta\, d\theta^2$$

und hieraus nach einer etwas weitläufigen Multiplication: *)

$$dx \cdot d^2y = 2\cos^2\theta\, d\theta\, dr^2 + \sin\theta \cdot \cos\theta\, dr\, d^2r + r^2 \sin^2\theta\, d\theta^3$$
$$- 3r\sin\theta \cdot \cos\theta\, d\theta^2\, dr - r\sin^2\theta\, d\theta \cdot d^2r$$
$$dy \cdot d^2x = -2\sin^2\theta\, d\theta\, dr^2 + \sin\theta\cos\theta\, dr\, d^2r - r^2\cos^2\theta\, d\theta^3$$
$$- 3r\sin\theta \cdot \cos\theta\, d\theta^2\, dr + r\cos^2\theta\, d\theta\, d^2r$$

Substituirt man diese Ausdrücke in die vorhin für p und q gefundenen Formeln, nämlich in:

$$p = \frac{dy}{dx}$$
$$q = \frac{dx\, d^2y - dy \cdot d^2x}{dx^3}$$

so erhält man p und q als Functionen von θ, nämlich:

$$p = \frac{\sin\theta\, dr + r\cos\theta\, d\theta}{\cos\theta\, dr - r\sin\theta\, d\theta}$$
$$q = \frac{2d\theta\, dr^2 - r d\theta\, d^2r + r^2\, d\theta^3}{(\cos\theta\, dr - r\sin\theta\, d\theta)^3}$$

Ferner ist nun: $1 + p^2 = \dfrac{dr^2 + r^2 d\theta^2}{(\cos\theta\, dr - r\sin\theta\, d\theta)^2}$

---

*) Man kann diese Arbeit bedeutend abkürzen: Da nämlich die Richtung der Abscissenachse, auf welche wir die Lage eines beliebigen Punctes, M, beziehen wollen, ganz willkürlich ist, so nehme man an, sie sei senkrecht auf den Radius vector AM, alsdann werden, (weil $\theta = 90$) die Differentiale:

$$dx = -r d\theta \qquad\qquad dy = dr$$
$$d^2y = d^2r - r d\theta^2 \qquad\qquad d^2x = -2d\theta\, dr$$
$$dx d^2y = r^2\, d\theta^3 - r d\theta d^2r; \qquad\qquad dy d^2x = -2d\theta\, dr^2$$

Dies in die vorhin für p und q gefundenen Formeln substituirt, kommt: $p = -\dfrac{dr}{r d\theta}$; $q = \dfrac{r^2\, d\theta^3 - r d\theta\, d^2r + 2d\theta \,.\, dr^2}{-r^3\, d\theta^3}$. Dies wieder in $\varrho = \dfrac{(1+p^2)^{\frac{3}{2}}}{q}$ substituirt, muss für ϱ dasselbe Resultat wie im Text kommen.

Da nun der gesuchte Krümmungshalbmesser $\varrho = \mp \frac{(1+p^2)^{\frac{3}{2}}}{q}$, so ist, in Polarcoordinaten ausgedrückt:

$$\varrho = \frac{(dr^2 + r^2\, d\theta^2)^{\frac{3}{2}}}{r d\theta\, d^2 r - r^2\, d\theta^3 - 2 d\theta\, dr^2}$$

$$\varrho = \frac{\left(r^2 + \frac{dr^2}{d\theta^2}\right)^{\frac{3}{2}}}{r^2 - r\,\frac{d^2 r}{d\theta^2} + 2 : \frac{dr^2}{d\theta^2}}$$

148.

Aufgabe. Es soll der Krümmungshalbmesser der Exponential-Spirale gefunden werden, deren Gleichung:

$$r = e^\theta$$

Auflösung. Man hat hier:

$$\frac{dr}{d\theta} = e^\theta \qquad \frac{dr^2}{d\theta^2} = e^{2\theta} = r^2$$

$$\frac{d^2 r}{d\theta^2} = e^\theta \qquad r\,\frac{d^2 r}{d\theta^2} = e^{2\theta} = r^2$$

$$\varrho = \frac{(2r^2)^{\frac{3}{2}}}{2r^2} = r\sqrt{2}$$

Der Krümmungshalbmesser ist also bei dieser Spirale stets gleich der Normale (§ 74). Aus dem rechtwinkligen Dreieck OAM folgt, dass die vom Pol an den Endpunct O des jedesmaligen Krümmungshalbmessers gehende grade Linie AO $= r$ ist.

Für die Archimedäische Spirale, deren Gleichung $r = \frac{a}{2\pi}\cdot\theta$ (höhere Geom. § 96) findet man den Krümmungshalbmesser:

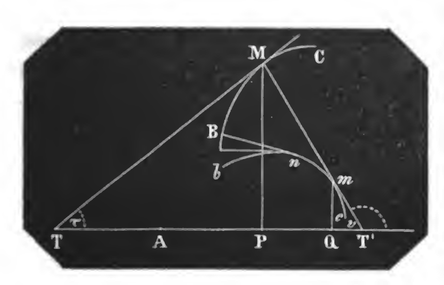
$$\varrho = \frac{\left(r^2 + \frac{a^2}{4\pi^2}\right)^{\frac{3}{2}}}{r^2 + \frac{a^2}{2\pi^2}}$$

Zehntes Buch.

Evoluten und Evolventen.

149.

Aufgabe. Es sei BC eine durch ihre Gleichung $y = F(x)$ gegebene krumme Linie. Durch ihre sämmtlichen auf einander folgenden Puncte denke man sich die Normallinien gezogen und auf diese, die den verschiedenen Puncten entsprechenden Krümmungshalbmesser abgetragen, so folgen auch die Endpuncte dieser Krümmungshalbmesser stetig auf einander, und bilden eine gesetzmässige krumme Linie *bc*. Es handelt sich darum, die Gleichung für diese krumme Linie *bc* (den geometrischen Ort der Mittelpuncte aller Krümmungskreise) aus der gegebenen Gleichung $y = F(x)$ zu finden.



Auflösung. Das hier Gesuchte ist eigentlich schon gefunden. Denn sind x, y die Coordinaten eines beliebigen Punctes, M, und α β die Coordinaten vom Endpuncte m des entsprechenden Krümmungs-Halbmessers $Mm = \varrho$, so ist, zufolge § 129:

$$\alpha = x - p\,\frac{(1 + p^2)}{q} \cdots\cdots\cdots\cdots (1)$$

$$\beta = y + \frac{1 + p^2}{q} \cdots\cdots\cdots\cdots (2)$$

Weil nun in diesen beiden Gleichungen*) y, p, q vermöge der gegebenen Gleichung $y = \mathrm{F}(x)$ Functionen von x sind, so ist klar, dass wenn man für x bestimmte Werthe gesetzt denkt, auch α und β bestimmt werden. Denkt man sich umgekehrt für α einen bestimmten Werth gesetzt, so erhält auch vermöge Gleichung (1) x einen bestimmten Werth, und diesen Werth von x, in (2) substituirt, wird auch β bestimmt. Könnte man die Gleichung (1) auf x reduciren, so könnte man den dafür erhaltenen Ausdruck statt x in (2) substituiren und erhielte dann β als Function von α.

150.

Aufgabe. Es sei die Gleichung einer Parabel, $y = \sqrt{ax}$, gegeben und die Gleichung für den geometrischen Ort der Mittelpuncte aller ihrer Krümmungskreise gesucht.

Auflösung. Hier ist $p = \frac{a^{\frac{1}{2}}}{2x^{\frac{1}{2}}}$; $q = -\frac{a^{\frac{1}{2}}}{4x^{\frac{3}{2}}}$. Diese Werthe von y, p, q in den Gleichungen (1) und (2) substituirt, kommt: $\alpha = 3x + \frac{1}{2}a$ und $\beta = -\frac{4x^{\frac{3}{2}}}{a^{\frac{1}{2}}}$. Aus der ersteren Gleichung folgt: $x = \frac{\alpha - \frac{1}{2}a}{3}$. Die gesuchte Gleichung ist mithin:

$$\beta = -\frac{4}{3}\sqrt{\frac{(\alpha - \frac{1}{2}a)^3}{3a}}$$

---

*) Diese beiden Gleichungen, so wie auch die Formel für den Krümmungshalbmesser erhält man folgendermaassen auf viel kürzerem Wege, als es in § 129 gezeigt worden. Man hat nämlich, wenn $y = \mathrm{F}(x)$ gegeben und hier, wie dort, wieder $\frac{dy}{dx} = p$, $\frac{d^2y}{dx^2} = q$ gesetzt und beachtet wird, dass $\mathrm{y} = y$, $\frac{d\mathrm{y}}{dx} = \frac{dy}{dx}$ und $\frac{d^2\mathrm{y}}{dx^2} = \frac{d^2y}{dx^2}$ sein muss.

$$(y-\beta)^2 + (x-\alpha)^2 = \varrho^2 \cdots\cdots\cdots (1)$$

$$(y-\beta)\cdot dy + (x-\alpha)\,dx = 0 \cdots\cdots\cdots (2)$$

$$(y-\beta)d^2y + dy^2 + dx^2 = 0 \cdots\cdots\cdots (3)$$

Aus (3) folgt: $y - \beta = -\frac{dx^2 + dy^2}{d^2y} = -\frac{1+p^2}{q}$

in (2) subst. kommt: $x - \alpha = \frac{dy}{dx}\left(\frac{dx^2 + dy^2}{d^2y}\right) = \frac{p}{q}(1+p^2)$

in (1) subst. ist: $\varrho = -\frac{(dx^2 + dy^2)^{\frac{3}{2}}}{dx\,d^2y} = -\frac{(1+p^2)^{\frac{3}{2}}}{q}$

oder auch (§ 70): $\varrho = -\frac{ds^3}{dx\,d^2y}$

151.

Obgleich die eben für die Parabel wirklich ausgeführte Elimination von x aus den beiden Gleichungen (1) und (2) (§ 149) in andern Fällen selten möglich ist, so gelangen wir doch, ohne diese Elimination bewirken zu brauchen, zu einem merkwürdigen Satze.

Setzt man nämlich *) für die Grösse $\frac{1+p^2}{q}$, welche eine Function von x ist, Kürze halber u, mithin § 149:

$$\alpha = x - p \cdot u \text{ und } \beta = y + u$$

und denkt man rechter Hand in den durch p, u, y vertretenen Functionen von x, $x+\Delta x$ statt x gesetzt, so würden auch α und

---

*) Zur Uebung dienend, möge man auch folgenden üblichen Weg verfolgen: Da die Coordinaten α, β und der Krümmungshalbmesser ϱ, die sich von Punct zu Punct der gegebenen krummen Linie $y = F(x)$ ändern, Functionen von x sind $[\alpha = \varphi(x),\ \beta = \psi(x),\ \varrho = \varkappa(x)]$, so kann man sich α, β, ϱ als Stellvertreter dieser Functionen in den 3 Gleichungen (§ 150, Rdbkg.):

$$(y-\beta)^2 + (x-\alpha)^2 - \varrho^2 = 0 \cdots\cdots\cdots (1)$$
$$(y-\beta)\,dy + (x-\alpha)\,dx = 0 \cdots\cdots\cdots (2)$$
$$(y-\beta)\,d^2y + dy^2 + dx^2 = 0 \cdots\cdots\cdots (3)$$

denken. Diese Gleichungen müssen nun für jedes x identisch Null, mithin auch ihr Differential $= 0$ sein (§ 135), d. h. ihr Differential nicht nur in Bezug auf x, y, sondern zugleich auch in Bezug auf α, β, ϱ. Aus (1) folgt:

$$(y-\beta)\,dy + (x-\alpha)\,dx - (y-\beta)\,d\beta - (x-\alpha)\,d\alpha = \varrho d\varrho$$

oder, weil nach (2) $(y-\beta)\,dy + (x-\alpha)\,dx = 0$ ist:

$$(y-\beta)\,d\beta + (x-\alpha)\,d\alpha = -\varrho d\varrho \cdots\cdots\cdots (4)$$

Aus (2) folgt:

$$dy^2 + (y-\beta)\,d^2y - dy\,d\beta + dx^2 - dx\,d\alpha = 0$$

oder, mit Berücksichtigung der Gleichung (3):

$$dy \cdot d\beta + dx \cdot d\alpha = 0 \cdots\cdots\cdots\cdots (5)$$

Aus (5) folgt die merkwürdige Beziehung:

$$\frac{d\beta}{d\alpha} = -\frac{dx}{dy}$$

Aus (2) folgt: $y - \beta = -\frac{dx}{dy}(x-\alpha)$, oder:

$$y - \beta = \frac{d\beta}{d\alpha}(x-\alpha)$$

Diesen Werth von $y-\beta$ in (1) und (4) substituirt, kommt:

$\mathfrak{G}$ um $\Delta\alpha$, $\Delta\mathfrak{G}$ wachsen. Geht man aber gleich auf das Differential (erstes Glied) über und bemerkt, dass (§ 38) $\frac{dy}{dx} = p$ und $\frac{dp}{dx} = q$, also $dp = qdx$ ist, so folgt aus obigen Gleichungen:

$$d\mathfrak{G} = dy + du$$

$$d\alpha = dx - u \cdot dp - pdu = dx - \frac{1+p^2}{q} \cdot qdx - pdu$$

$$d\alpha = -p(pdx + du) = -p(dy + du).$$

Dividirt man die erste Gleichung durch die letzte, so ist (§ 145):

$$\frac{d\mathfrak{G}}{d\alpha} = -\frac{1}{p}.$$

Dieser Ausdruck $-\frac{1}{p}$ (eine Function von x) ist nun offenbar die trigonometrische Tangente des Winkels mT$'x$, welchen die durch m an die krumme Linie bc gelegte Berührungslinie mT' mit der Abscissenachse macht. Da nun $\operatorname{tg} \mathfrak{v} = \frac{1}{p}$ und $\operatorname{tg} \tau = p$, so ergänzen sich die beiden Winkel $\mathfrak{v}$ und τ zu einem rechten (weil die Tangente des einen die cotangente des andern ist). Hieraus folgt nun aber, weil T Mm = 90°, dass die beiden Linien Mm und mT' eine einzige grade bilden, denn Mm muss, verlängert, mit der Abscissenachse einen Winkel bilden, welcher den Winkel τ zu 90° ergänzt. Jeder Krümmungshalbmesser, wie Mm, ist also normal auf die krumme Linie BC, und tangirt zugleich die krumme Linie bc.

152.

* Eine andere Merkwürdigkeit (auf welche wohl zuerst die im folgenden § zu erwähnende rein mechanische Vorstellung geführt hat) besteht darin, dass ein beliebiger Bogen der Linie bc,

---

$$\left(\frac{d\mathfrak{G}^2}{d\alpha^2} + 1\right)(x - \alpha)^2 = \varrho^2$$

$$\left(\frac{d\mathfrak{G}^2}{d\alpha^2} + 1\right)(x - \alpha) = -\varrho\frac{d\varrho}{d\alpha}$$

Letztere Gleichung quadrirt und durch die vorhergehende dividirt, kommt:

$$d\varrho = \sqrt{d\alpha^2 + d\mathfrak{G}^2}$$

z. B. der Bogen *bm*, dessen unbestimmte Länge wir $= s$ setzen wollen, dasselbe Differential hat, wie der an seinen Endpunct *m* gehende Krümmungshalbmesser *Mm*.

Weil nämlich die Coordinaten α, β des Punctes *m*, Functionen der Abscisse x des entsprechenden Punctes M sind, so können wir das Differential des Bogens s, nämlich $ds = \sqrt{d\alpha^2 + d\beta^2}$ (§ 70) auch, (ohne die entwickelte Gleichung zwischen α und β kennen zu brauchen) durch eine Function von x und dessen Differential ausdrücken. Da nämlich bereits (§ 151) gefunden, dass $d\alpha = -p(dy + du)$ und $d\beta = dy + du$, so ist, indem man diese Ausdrücke für $d\alpha$ und $d\beta$ in die Formel $ds = \sqrt{d\alpha^2 + d\beta^2}$ substituirt:

$$ds = (dy + du) \cdot \sqrt{1 + p^2}$$

Der entsprechende Krümmungshalbmesser ist nun $\varrho = -\frac{(1+p^2)^{\frac{3}{2}}}{q}$ oder $\frac{1+p^2}{q}$ wieder $= u$ gesetzt: $\varrho = -(1+p^2)^{\frac{1}{2}}\, u$. Letztere Gleichung differentiirt, giebt:

$$d\varrho = -[u \cdot (1+p^2)^{-\frac{1}{2}}\, p dp + (1+p^2)^{\frac{1}{2}} du]$$

$$-d\varrho = \frac{up \cdot dp + (1+p^2) \cdot du}{(1+p^2)^{\frac{1}{2}}}$$

$$-d\varrho = \frac{\frac{1+p^2}{q} \cdot \frac{dy}{dx} \cdot q dx + (1+p^2) du}{\sqrt{(1+p^2)}}$$

$$d\varrho = -(dy + du) \cdot \sqrt{1+p^2}$$

Es ist also bis auf das Vorzeichen $d\varrho = ds$, mithin auch $\Delta\varrho = \Delta s$. Dies beweist, dass der zwischen zwei Puncten *m* und *n* enthaltene Bogen, gleich dem Unterschiede der beiden an diese Puncte gehenden Krümmungshalbmesser ist.

153.

Erklärung. Man denke sich um die convexe Seite einer gesetzmässigen krummen Linie, *bc*, einen in *c* befestigten unausdehnsamen Faden gelegt, denselben im andern Punct *b* gefasst und straff angezogen, von der krummen Linie wieder abgewickelt, so wird der Punct *b* des stets gerade gespannten Fadens offenbar eine andere gesetzmässige krumme Linie, BMC, beschreiben.

Die erstere krumme Linie *bc* heisst hier die Evolute (die

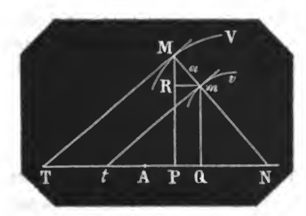
abgewickelte) und die durch die Abwickelung erzeugte krumme Linie BMC die Evolvente (die abwickelnde). Der jedesmalige abgewickelte und gerade gespannte Theil der Evolute, wie nB, mM, heisst ein Strahl der Evolute.

Die Evolution einer krummen Linie hat Aehnlichkeit mit der Beschreibung eines Kreises. Die Evolute vertritt hier die Stelle des Mittelpuncts, der Radius aber, statt constant zu sein, ändert sich hier von Punct zu Punct. Der berühmte Huyghens hat die Evoluten zuerst erdacht, und sie auf die, auch von ihm zuerst erfundenen Pendeluhren angewandt. Auch in der Theorie der Räderwerke findet die der Evoluten Anwendung.

Die mechanische Erzeugung der Evolvente ruft zugleich die Vorstellungen hervor, dass 1. der Unterschied zweier Strahlen nB, mM gleich ist dem zwischen ihren Endpuncten enthaltenen Bogen nm; 2) dass alle Strahlen die Evolute tangiren und auf der Evolvente normal stehen, so dass also die Evolute nichts anderes ist, als der geometrische Ort der Mittelpuncte aller Krümmungskreise der Evolvente.

154.

* Aufgabe. Denkt man sich sämmtliche Normalen einer durch ihre Gleichung $y = \mathrm{F}(x)$ gegebenen krummen Linie, MV, um ein gleiches Stück, $\mathrm{M}m = a$, verkürzt (verlängert), so bilden die stetig auf einander folgenden Endpuncte eine andere krumme Linie, mv, welche die Aequidistante der ersteren heisst. Es soll die Gleichung hierfür gefunden werden.



Auflösung. Seien allgemein $\mathrm{AP} = x$ und $\mathrm{MP} = y$ die Coordinaten eines Punctes, M, der gegebenen krummen Linie, und $\mathrm{AQ} = \alpha$, $m\mathrm{Q} = \beta$ die Coordinaten des entsprechenden Punctes m der gesuchten krummen Linie, so hat man aus der gegebenen Gleichung $y = \mathrm{F}(x)$ zuerst: $\operatorname{tg} \mathrm{T} = \frac{dy}{dx} = p$ und da nun Winkel $m\mathrm{MR} = \mathrm{M} = \mathrm{T}$ und $\sin \mathrm{M} = \frac{p}{\sqrt{1+p^2}}$, $\cos \mathrm{M} = \frac{1}{\sqrt{1+p^2}}$ (Trigonom. § 100, 5), so ist: $y - \beta = a \cdot \cos \mathrm{M}$ und $\alpha - x = a \cdot \sin \mathrm{M}$. Hieraus:

$$\beta = y - a \cdot \frac{1}{\sqrt{1+p^2}} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (1)$$

$$\alpha = x + a \cdot \frac{p}{\sqrt{1+p^2}} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (2)$$

Drückt man y und p durch ihre Functionen von x aus, so braucht man nur x aus beiden Gleichungen zu eliminiren, um die geforderte Gleichung zwischen α und β zu erhalten.

* Zusatz 1. Ohne diese Elimination, die übrigens selten möglich ist, bewirken zu brauchen, kann man doch leicht aus den beiden allgemeinen Gleichungen (1) und (2) folgern, dass die durch je zwei entsprechende Puncte, wie M, m, gelegten Berührungslinien stets parallel sind. Dies ist bewiesen, wenn man zeigt, dass $\operatorname{tg} T = \operatorname{tg} t$ oder $\frac{d\beta}{d\alpha} = \frac{dy}{dx}$ ist. Aus (1) uud (2) folgt aber, dass (vergl. § 151):

$$d\beta = dy + \frac{ap\,dp}{(1+p^2)^{\frac{3}{2}}}$$

$$d\alpha = dx + \frac{a\,dp}{(1+p^2)^{\frac{3}{2}}}$$

Aus $\frac{dy}{dx} = p$ folgt $dy = p\,dx$, mithin $d\beta = p\left(dx + \frac{a\,dp}{(1+p^2)^{\frac{3}{2}}}\right)$

Daher: $\frac{d\beta}{d\alpha} = p$.

Man könnte hierdurch verleitet werden, aus dieser gleichen arithmetischen Beziehung auch auf die geometrische zu schliessen, und glauben, dass die Aequidistante immer eine ähnliche oder gar gleiche krumme Linie sei. Dies ist jedoch nicht der Fall. Die Aequidistante ist in der Regel eine ganz andere, oft sehr unähnliche krumme Linie.

Zusatz 2. Denkt man sich die untere Linie mv durch Abwickelung entstanden, so kann man sich die obere Linie MV ebenso entstanden denken, indem der gespannte Faden um die Grösse a länger genommen wurde. Es gehören also zu einer und derselben Evolute unzählige Evolventen.

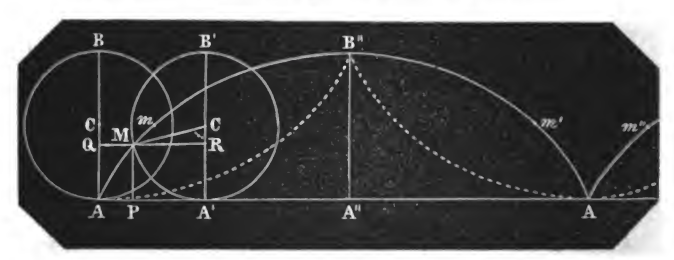
155.

Erklärung. Der Durchmesser AB eines Kreises gleite in einer Ebene rechtwinklig an einer geraden Linie AA fort (siehe

folg. Fig.); zu gleicher Zeit drehe sich der Radius $CA = r$ in entgegengesetzter Richtung um den Mittelpunct C und zwar so, dass der vom Endpunct A in der Peripherie durchlaufene Bogen, dem auf der geraden Linie durchlaufenen Weg an Länge stets gleich ist, z. B. $\overline{AA'} = \widehat{A'M}$, und $AA = 2r\pi$, alsdann beschreibt der Endpunct A des Radius CA nach einer ganzen Umdrehung eine krumme Linie AB″A, welche Cycloide (Radlinie) heisst. Die Cycloide kann man sich auch durch den Punct A beschrieben denken, indem der Kreis C auf der geraden Linie so fortrollt, dass die stetig auf einander folgenden Puncte der Peripherie mit den stetig auf einander folgenden Puncten der geraden Linie zusammenfallen und der fortrollende Kreis nicht rutschen (gleiten) kann. Es ist klar, dass bei fortgesetzter Bewegung dieselbe Cycloide unzählige Mal erzeugt wird. Da nun diese krumme Linie sehr viele merkwürdige Eigenschaften hat und für die höhere Mechanik von Wichtigkeit ist, so wollen wir sie hier discutiren. Zuerst stellen wir die folgende Aufgabe.

156.

Aufgabe. Die Gleichung der Cycloide zu finden.



Auflösung. Es sei $AP = x$, $MP = y$, $AC = r$, dann ist $x = AA' - MR$. Heisst nun der mit der Längeneinheit aus C′ zwischen den Schenkeln des Winkels MC′R beschriebene Bogen θ, so ist der vom Endpunct A des Radius CA durchlaufene Bogen $A'M = r\theta$. Da nun $AA' = \widehat{A'M} = r\theta$ und $C'R = r - y$, $MR = \sqrt{2ry - y^2}$, $\cos\theta = \frac{r-y}{r}$, mithin $\theta = \text{arc}\cdot\cos\frac{r-y}{r}$, so ist:

$$x = r\cdot\text{arc}\cos\frac{r-y}{r} \mp \sqrt{2ry - y^2}, \quad \cdots\cdots (1)$$

Berücksichtigt man hier das mechanische Gesetz, wonach die Cycloide durch die vorgeschriebene Bewegung entstehen soll, so ist durchaus das doppelte Vorzeichen $\mp$ erforderlich und da gilt offenbar das obere, so lange der rotirende Radius sich auf der linken, und das untere, so lange er sich auf der rechten Seite des parallel mit sich selbst fortgleitenden Durchmessers befindet. Dies vorausgeschickt, können wir nun leicht zeigen, dass in obiger Gleichung wirklich alle auf einander folgenden unzähligen Cycloiden enthalten sind.*)

Zufolge Trigon. § 59 sind alle Bögen, deren cosinus $= 1$ ist, durch die Formel $2k\pi$ gegeben, wenn man darin $k = 0, 1, 2, 3 \cdots$ setzt, z. B. $\cos 0 = 1$; $\cos 2\pi = 1$, $\cos 4\pi = 1$ etc. Ebenso ist $\cos(2k+1)\pi = -1$ und $\cos(2k+1)\cdot\frac{\pi}{2} = 0$.

Dies beachtet, ist nun für $y = 0$, $x = r \cdot \text{arc}(\cos = 1) = r \cdot 0$, $= r \cdot 2\pi$, $= r \cdot 4\pi$ etc., wodurch also sämmtliche Spitzen A, A·· bestimmt sind.

Für $y = 2r$ wird $x = r \cdot \text{arc}(\cos = -1) = r\pi$, $= r \cdot 3\pi$, $= r \cdot 5\pi$ etc., wodurch alle höchsten Puncte B''··· bestimmt sind.

Für $y = r$ wird $x = r \cdot \text{arc}(\cos = 0) \mp r$, mithin $x = r \cdot \frac{\pi}{2} - r$, $= r\,\frac{3\pi}{2} + r$, $= r \cdot \frac{5\pi}{2} - r$ etc. Dies giebt die Puncte $m, m', m'' \cdots$ etc.

Anmerkung 1. Dreht sich der Radius CA statt links, rechts herum, so werden offenbar dieselben (hier punctirten) Cycloiden nur in umgekehrter Lage beschrieben, und man erhält

*) Man kann auch so verfahren: Es ist offenbar:

$$x = r\theta - r\sin\theta \quad \cdots\cdots (1)$$
$$y = r - r\cos\theta \quad \cdots\cdots (2)$$

Um aus diesen beiden Gleichungen die dritte veränderliche Grösse θ zu eliminiren, hat man aus (2) $\cos\theta = \frac{r-y}{r}$ und hieraus $\sin\theta = \mp\frac{\sqrt{2ry-y^2}}{r}$, $\theta = \text{arc}\cos\frac{r-y}{r}$. Dies in (1) substituirt, kommt dieselbe Gleichung wie oben. Man kann aber auch die dritte veränderliche Grösse θ beibehalten und die Cycloide durch Hülfe der beiden Gleichungen (1) und (2) construiren und discutiren. So ist für:

$\theta = 0,$	$\frac{\pi}{2},$	$\pi,$	$\frac{3}{2}\pi,$	$2\pi, \ldots\ldots$
$x = 0,$	$r.\frac{\pi}{2} - r,$	$r\pi,$	$r.\frac{3\pi}{2} + r,$	$r.2\pi, \ldots\ldots$
$y = 0,$	$r,$	$2r.$	$r,$	$0, \ldots\ldots$

wieder dieselbe Gleichung, nur mit umgekehrten Vorzeichen:

$$x = r \text{ arc } \cos \frac{r-y}{r} \pm \sqrt{2ry - y^2}$$

2. Jede Cycloide besteht aus zwei gleichen Hälften, weil die Abstände zweier gleich hoch liegender Puncte, m, m', von der Linie B″A″ gleich sind.

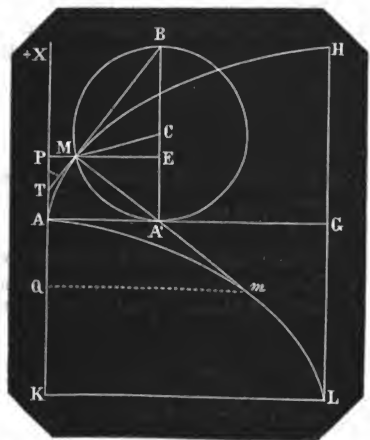
3. Will man vorstehende Gleichung als ganz willkürlich aufgeworfen betrachten und rein geometrisch deuten, mithin auf die in der Aufgabe angegebene mechanische Entstehungsweise keine Rücksicht nehmen, so fällt auch die Vorstellung des sich drehenden Radius weg. Die Construction der Gleichung giebt dann, wegen des doppelten Vorzeichens, sämmtliche Cycloiden in beiderlei Lagen, die sich, sowohl rechts als links von A, unzählige mal wiederholen, weil man die zu $\cos = \frac{r-y}{r}$ gehörigen Bögen auch in negativer Drehung nehmen kann.

4. Verwechselt man die Coordinatenachsen mit einander, und setzt AQ $= x$, MQ $= y$, so giebt die Gleichung (1), indem man x mit y vertauscht:

$$y = r \text{ arc } \cos \frac{r-x}{r} \mp \sqrt{2rx - x^2}$$

157.

Aufgabe. Durch einen gegebenen Punct, M(x, y), eine Tangente au die Cycloide zu legen, so wie auch den Krümmungshalbmesser für diesen Punct zu bestimmen, und die Gleichung für den geometrischen Ort der Mittelpuncte aller Krümmungskreise (die Evolute der Cycloide) zu finden.



Auflösung. Nehmen wir AX als Abscissen- und AG als Ordinaten-Achse, *) setzen also AP $= x$ und MP $= y$, so folgt aus der Gleichung:

*) In § 158 wird auch die Gleichung (1) der Cycloide discutirt werden.

$$y = r \text{ arc cos } \frac{r-x}{r} \mp \sqrt{2rx - x^2}$$

indem wir nur die erstere Hälfte AH der Cycloide betrachten, mithin von dem doppelten Vorzeichen $\mp$ nur das obere zu berücksichtigen brauchen: *)

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x}{\sqrt{2rx - x^2}} = \text{tg } \tau$$

Dieser Ausdruck lässt sich leicht construiren. Weil nämlich $A'E = AP = x$ und $ME = \sqrt{2rx - x^2}$ (Geomet. § 126), so ist auch $\frac{x}{\sqrt{2rx - x^2}} = \frac{A'E}{ME} = \text{tg } EMA'$ und foglich $EMA' = \tau$, mithin auch $\widehat{MBE}$ $(= \widehat{EMA'}) = \tau$.

Wenn aber zwei durch denselben Punct M vorwärts und rückwärts gehende Linien MT, MB, mit zwei parallelen Linien AX, A'B gleiche Winkel machen ($MBE = \tau$), so bilden sie eine einzige grade Linie. Dieses merkwürdigen Umstandes halber ist es also leicht, durch einen gegebenen Punct, M, eine Berührungslinie an die Cycloide zu legen. Man legt nämlich durch den Punct M erst den Erzeugungskreis und verlängert dann nur die Sehne BM. Die andere Sehne A'M (weil senkrecht auf BM) giebt also, rückwärts verlängert, die Normale. Die vier Linien: Tangente, Subtangente, Normale und Subnormale, sind leicht zu bestimmen, bieten aber nichts Merkwürdiges.

Um den Krümmungshalbmesser $\varrho = \frac{(1+p^2)^{\frac{3}{2}}}{q}$ (§ 129) zu bestimmen, welcher natürlich auf der concaven Seite liegt, hat man aus der schon gefundenen Gleichung:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x}{\sqrt{2rx - x^2}} = p$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{rx}{(2rx - x^2)^{\frac{3}{2}}} = q$$

mithin: $\varrho = 2\sqrt{2rx}$

*) Will man die beiden Gleichungen (§ 156, Rdkg.) benutzen, so sind diese hier, weil jetzt $AP = x$, $MP = y$ gesetzt worden:

$$y = r\theta - r \sin \theta; \qquad dy = r(1 - \cos \theta)\, d\theta$$

$$x = r - r \cos \theta; \qquad dx = r \cdot \sin \theta d\theta$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{r(1 - \cos \theta)}{r \sin \theta} = \frac{A'E}{ME}$$ etc., wie im Text (§ 144).

Dieser Ausdruck für ϱ lässt sich ebenfalls leicht construiren. Weil nämlich $A'E = x$ und $A'M = \sqrt{2rx}$ (Geom. § 126, Zus. 1), so erhalten wir das merkwürdige Resultat, dass der Krümmungshalbmesser für einen beliebigen Punct, M, der Cycloide just mal so lang ist, als die entsprechende Sehne MA′ des Erzeugungskreises. Diese Sehne MA′ braucht man also nur um sich selbst nach m zu verlängern, so ist m der Mittelpunct des zu M gehörigen Krümmungskreises. Für $x = 0$ ist $\varrho = 0$ (die Krümmung in allen Spitzen unendlich). Für $x = 2r$ ist $\varrho = 4r = HL = \widehat{AL}$ (§ 153).

Um schliesslich noch die Gleichung für den geometrischen Ort AmL der Mittelpuncte aller Krümmungskreise zu erhalten, brauchen wir nur in den beiden § 129 gefundenen allgemeinen Gleichungen:

$$\alpha = x - p \cdot \frac{1 + p^2}{q} \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (1)$$

$$\beta = y + \frac{1 + p^2}{q} \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (2)$$

die Grössen y, p, q durch x auszudrücken und dann x zu eliminiren, was hier möglich ist. In Bezug auf die Cycloide ist hier nämlich:

$$y = r \operatorname{arc} \cos \frac{r - x}{r} - \sqrt{2rx - x^2}$$

$$p = \frac{x}{\sqrt{2rx - x^2}}; \qquad q = \frac{rx}{(2rx - x^2)^{\frac{3}{2}}}$$

$$1 + p^2 = \frac{2rx}{2rx - x^2}; \qquad \frac{1 + p^2}{q} = 2\sqrt{2rx - x^2}$$

Dies in die beiden Gleichungen (1) und (2) gesetzt, kommt:

$$\alpha = - x$$

$$\beta = r \operatorname{arc} \cos \frac{r - x}{r} + \sqrt{2rx - x^2}$$

Setzen wir in letzterer Gleichung $-\alpha$ statt x, so ist x eliminirt, und wir erhalten für die Evolute der Cycloide die Gleichung:

$$\beta = r \operatorname{arc} \cos \frac{r + \alpha}{r} + \sqrt{- 2r\alpha - \alpha^2}$$

Damit die Ordinate β reell wird, muss man die Abscisse α negativ, also in entgegengesetzter Richtung der positiven Seite

AX der Abscissenachse nehmen. Für $\alpha = -2r = AK$ z. B. wird $\mathfrak{s} = r$ arc $(\cos = -1) = r\pi = LK$.

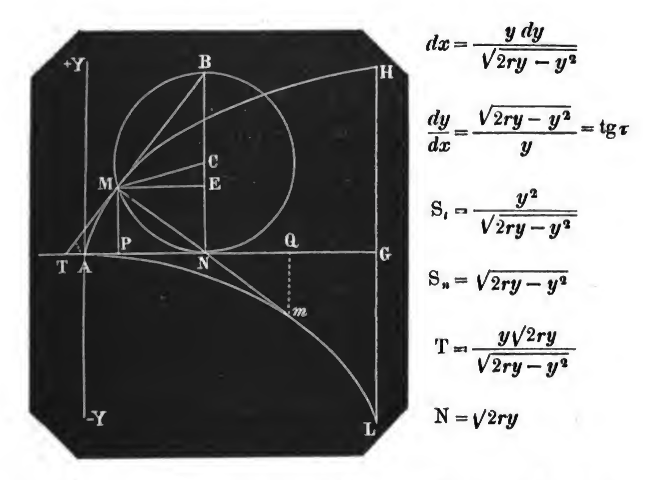
Die Evolute der Cycloide ist also wieder eine Cycloide und zwar ganz dieselbe (§ 156, 2), jedoch nur so congruent, dass AL nicht auf AH, sondern auf HA fällt.

158.

Nimmt man AG als Abscissenachse und setzt $AP = x$, $MP = y$, so ist die Gleichung für die erste Hälfte der Cycloide (§ 156):

$$x = r \operatorname{arc} \cos \frac{r-y}{r} - \sqrt{2ry - y^2}$$

Hieraus folgt die Differentialgleichung der Cycloide:



$$dx = \frac{y\,dy}{\sqrt{2ry - y^2}}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\sqrt{2ry - y^2}}{y} = \operatorname{tg} \tau$$

$$S_{,} = \frac{y^2}{\sqrt{2ry - y^2}}$$

$$S_{,,} = \sqrt{2ry - y^2}$$

$$T = \frac{y\sqrt{2ry}}{\sqrt{2ry - y^2}}$$

$$N = \sqrt{2ry}$$

Weil $NE = y$ und die Sehne $MN = \sqrt{2ry}$ (Geom. § 126), so ist klar, dass die Richtungen der Tangential- und Normallinie für einen Punct, M, der Cycloide durch die Complementairsehnen MN, MB des dadurch gelegten Erzeugungskreises gegeben sind.

Um den Krümmungshalbmesser $\varrho = \frac{(1+p^2)^{\frac{3}{2}}}{q}$ zu finden, hat man aus der Gleichung:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\sqrt{2ry - y^2}}{y} = \sqrt{\frac{2r}{y} - 1} = p$$

$$\frac{d^2y}{dx} = -\tfrac{1}{2}\left(\frac{2r}{y} - 1\right)^{-\frac{1}{2}} \cdot \frac{2r\,dy}{y^2}$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{r}{y^2} \cdot \frac{1}{\sqrt{\frac{2r}{y} - 1}} \cdot \frac{dy}{dx}$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{r}{y^2} = q$$

$$\varrho = 2\sqrt{2ry}$$

Der Krümmungshalbmesser ist also just das Doppelte der Normale. Für $y = 2r$ ist $\varrho = 4r = HL$ etc.

Um die Evolute der Cycloide zu finden, substituiren wir die Werthe von p und q in die beiden Formeln § 149, und erhalten dann:

$$\alpha = x + 2\sqrt{2ry - y^2} = r \cdot \text{arc cos}\,\frac{r-y}{r} + \sqrt{2ry - y^2}$$

$$\beta = -y, \text{ folglich:}$$

$$\alpha = r \text{ arc cos}\,\frac{r+\beta}{r} + \sqrt{-2r\beta - \beta^2}$$

Elftes Buch.

Wie man eine Function von zwei oder mehreren absolut veränderlichen Grössen differentiirt.

159.

Bisher haben wir immer nur Functionen zweier veränderlicher Grössen x, y betrachtet und uns die eine y, als von der andern x, abhängig gedacht. Es kommen nun aber auch Fälle vor, wo eine Grösse, z, von zweien oder mehreren andern Grössen $x, y \cdots$ abhängig ist, letztere aber völlig unabhängig von einander sind. Dies würde z. B. schon der Fall sein, wenn wir eine Gleichung für eine Fläche aufstellen wollten. Hier brauchen wir dann nothwendig, um die Lage eines Punctes zu bestimmen, drei Coordinaten x, y, z und wo wir, wie üblich, z als abhängig oder als eine Function von den beiden andern x, y denken, welche letztere beiden willkürlich veränderlich, mithin ganz unabhängig von einander sind. (Vergl. höh. Geometrie §§ 102 und 103 etc.)

160.

Des leichtern Verständnisses halber, wollen wir vorerst nicht mehr als zwei unabhängig veränderliche Grössen nehmen, und der grössern Anschauung wegen bei dem eben erwähnten geometrischen Beispiele stehen bleiben. Sei deshalb ganz allgemein (S. Figur höhere Geometrie § 103 · ·):

$$z = F(x, y)$$

die Gleichung irgend einer krummen Fläche, A, der Anfangspunct der drei auf einander senkrechten Achsen. Nimmt man zu einem beliebigen $x = AP$ ein beliebiges $y = PQ$, so ist, vermöge der gegebenen Gleichung, die dritte Ordinate $z = MQ$, und mithin der Punct M der Fläche bestimmt.

Es ist nun einleuchtend, das die abhängige Grösse z im Allgemeinen jedes Mal eine Aenderung erleiden muss, wenn wir annehmen, dass entweder x allein, oder auch y allein, oder auch beide x und y zugleich sich ändern. Um diese drei verschiedenen Annahmen darzustellen, wollen wir die Aenderung (Increment), welche z erhält, indem x allein sich ändert, mit $\Delta_x z$, wenn y allein sich ändert mit $\Delta_y z$ und wenn beide x, y zugleich in andere Zustände übergehen, einfach mit Δz bezeichnen. Ebenso wollen wir den Differential-Quotienten von $z = F(x, y)$, in Bezug auf x genommen mit $F'_x(x, y)$ oder mit $\left(\frac{dz}{dx}\right)$, und in Bezug auf y genommen mit $F'_y(x, y)$ oder $\left(\frac{dz}{dy}\right)$ andeuten.

161.

Lassen wir nun in:

$$z = F(x, y) \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (1)$$

bloss x sich ändern und in $x + \Delta x$ übergehen, so hat man:

$$z + \Delta_x z = F(x + \Delta x, y)$$

Die rechte Seite lässt sich nun nach dem Taylor'schen Lehrsatz in eine nach Potenzen von Δx fortschreitende Reihe entwickeln und man hat (y als constant betrachtet)*):

$$z + \Delta_x z = F(x, y) + F'_x(x, y)\Delta x + F''_x(x, y)\frac{\Delta x^2}{1 \cdot 2} + \cdots$$

$$\Delta_x z = F'_x(x, y)\Delta x + F''_x(x, y) \cdot \frac{\Delta x^2}{1 \cdot 2} + \cdots$$

$$\Delta_x z = \left(\frac{dz}{dx}\right)\Delta x + \left(\frac{d^2 z}{dx^2}\right)\frac{\Delta x^2}{1 \cdot 2} + \cdots$$

*) Sei z. B. $z = x^2 y - 3y^2 + 1$, so ist:

$$z + \Delta_x z = (x + \Delta x)^2 y - 3y^2 + 1 = x^2 y - 3y^2 + 1 + 2xy \,.\, \Delta x + y \,.\, \Delta x^2$$

$$\Delta_x z = 2xy \,.\, \Delta x + y \,.\, \Delta x^2.$$

Dies hätte man kürzer haben können, weil hier: $\left(\frac{dz}{dx}\right) = 2xy$; $\left(\frac{d^2 z}{dx^2}\right) = 2y$, daher: $\Delta_x z = 2xy \,.\, \Delta x + 2y \,.\, \frac{\Delta x^2}{1 \,.\, 2}$.

und wenn in $z = F(x, y)$, x seinen Werth behält und dagegen y sich ändert und in $y + \Delta y$ übergeht, so findet man auf gleiche Weise die partielle Differenz von z in Bezug auf y, nämlich:

$$\Delta_y z = \left(\frac{dz}{dy}\right)\Delta y + \left(\frac{d^2 z}{dy^2}\right)\cdot\frac{\Delta y^2}{1\cdot 2} + \left(\frac{d^3 z}{dy^3}\right)\cdot\frac{\Delta y^3}{1\cdot 2\cdot 3} + \cdots$$

Aendern sich beide Grössen x, y gleichzeitig um Δx, Δy, so hat man für den neuen Zustand der Function (1) in Zeichen:

$$z + \Delta z = F(x + \Delta x, y + \Delta y).$$

Weil hier aber z ganz allgemein als eine Function von x, y nur in Zeichen angedeutet ist, $z = F(x, y)$, so kann man die beiden gleichzeitigen Substitutionen $x + \Delta x$, $y + \Delta y$ statt x, y auch nur andeuten, aber nicht zugleich ausführen. *) Man sieht aber leicht, dass man zu demselben Resultat gelangt, wenn man in $z = F(x, y)$ erst $x + \Delta x$ statt x setzt, und nach dem Taylor'schen Lehrsatz nach Potenzen von Δx entwickelt, und dann in der erhaltenen Entwickelung allenthalben $y + \Delta y$ statt y setzt und wiederum nach dem Taylor'schen Lehrsatz nach Potenzen von Δy entwickelt.

162.

Nach dem vorhergehenden § folgt aus:

$$z = F(x, y)$$

wenn man erst $x + \Delta x$ statt x setzt:

$$z + \Delta_x z = F(x + \Delta x, y)$$

---

*) Nimmt man für $F(x, y)$ eine bestimmte Form, wäre z. B.

$$z = x^2 y - 3y^2 + 1,$$

so kann man beide Substitutionen zugleich vornehmen. Es ist nämlich:

$$z + \Delta z = (x + \Delta x)^2 (y + \Delta y) - 3(y + \Delta y)^2 + 1$$

$$z + \Delta z = x^2 y - 3y^2 + 1 + 2xy\Delta x + (x^2 - 6y)\Delta y + y\Delta x^2 + 2x\Delta x\Delta y - 3\Delta y^2 + \Delta x^2 \Delta y$$

$$\Delta z = 2xy . \Delta x + (x^2 - 6y) . \Delta y + y . \Delta x^2 + 2x\Delta x\Delta y - 3\Delta y^2 + \Delta x^2 \Delta y.$$

Setzt man aber erst $x + \Delta x$ statt x, so ist, nach vorhergehender Note:

$$z + \Delta_x z = x^2 y - 3y^2 + 1 + 2xy\Delta x + y . \Delta x^2$$

und wenn man hierin jetzt $y + \Delta y$ statt y setzt:

$$z + \Delta z = x^2 (y + \Delta y) - 3(y + \Delta y)^2 + 1 + 2x\Delta x(y + \Delta y) + (y + \Delta y)\Delta x^2$$

$$z + \Delta z = x^2 y - 3y^2 + 1 + (x^2 - 6y)\Delta y + 2xy\Delta x + y\Delta x^2 + 2x\Delta x\Delta y - 3\Delta y^2 + \Delta x^2 \Delta y$$

oder, nach Potenzen von Δx entwickelt, indem man y constant sein lässt:

$$z + \Delta_x z = F(x,y) + F'_x(x,y)\,\Delta x + F''_{x_2}(x,y)\cdot\frac{\Delta x^2}{1\cdot 2} + \cdots$$

Setzt man jetzt allenthalben $y + \Delta y$ statt y, so hat man:

$$(1)\ z+\Delta z = F(x,y+\Delta y) + F'_x(x,y+\Delta y)\cdot\Delta x + F''_{x_2}(x, y+\Delta y\cdot\frac{\Delta x^2}{1\cdot 2} + \cdots$$

und wenn man rechter Hand das erste Glied, sowie auch die Coefficienten von Δx, $\Delta x^2 \cdots$ nach dem Taylor'schen Lehrsatz entwickelt und beachtet, dass jetzt x constant ist, so hat man: *)

$$F(x, y+\Delta y) = F(x,y) + F'_y(x,y)\cdot\Delta y + F''_y(x,y)\frac{\Delta y^2}{1\cdot 2} + \cdots$$

$$F'_x(x,y+\Delta y) = F'_x(x,y) + F''_{xy}(x,y)\Delta y + F'''_{xy_2}(x,y)\cdot\frac{\Delta y^2}{1\cdot 2} + \cdots$$

$$F''_{x_2}(x,y+\Delta y) = F''_{x_2}(x,y) + F'''_{x_2y}(x,y)\Delta y + F^{IV}_{x_2y_2}(x,y)\cdot\frac{\Delta y^2}{1\cdot 2} + \cdots$$

$$\vdots$$

Dies in (1) substituirt, ist also in Zeichen:

$$z + \Delta z = F(x,y) + F'_y(x,y)\cdot\Delta y + F''_{y_2}(x,y)\cdot\frac{\Delta y^2}{1\cdot 2} + M\Delta y^3 + \cdots$$

$$F'_x(x,y)\Delta x + F''_{xy}(x,y)\Delta y\Delta x + M'\Delta y^2\Delta x + \cdots$$

$$+ F''_{x_2}(x,y)\cdot\frac{\Delta x^2}{1\cdot 2} + M''\Delta y\cdot\Delta x^2 + \cdots$$

oder weil $z = F(x,y)$, so hat man für die totale Differenz von z in der bequemeren Bezeichnung:

$$\Delta z = \left(\frac{dz}{dy}\right)\cdot\Delta y + \left(\frac{dz}{dx}\right)\Delta x + \left(\frac{d^2 z}{dy^2}\right)\cdot\frac{\Delta y^2}{1\cdot 2} + \left(\frac{d^2 z}{dx dy}\right)\Delta x\Delta y + \left(\frac{d^2 z}{dx^2}\right)\frac{\Delta x^2}{1\cdot 2} + \cdots$$

---

*) $F'''_{xy_2}(x,y)$ soll andeuten, dass $F(x,y)$ einmal in Bezug auf x, und dann der erhaltene Differential-Quotient noch zweimal in Bezug auf y differentiirt worden, was man auch durch $\left(\frac{d^3 z}{dx dy^2}\right)$ andeuten kann. Wäre zum Beispiel $z = x^4y^5 - y^3 + 1$, so wäre $\left(\frac{dz}{dx}\right) = 4x^3y^5$; $\left(\frac{d^2 z}{dx dy}\right) = 20x^3y^4$; $\left(\frac{d^3 z}{dx dy^2}\right) = 80x^3y^3$.

163.

Wir haben im vorhergehenden § aus der Function $z = F(x, y)$ die totale Differenz (d. h. wenn die absolut veränderlichen Grössen sich beide zugleich ändern) erhalten, indem wir erst $x + \Delta x$ statt x, und dann in der erhaltenen Entwicklung $y + \Delta y$ statt y setzen. Es lässt sich aber unmittelbar einsehen, dass nothwendig dasselbe Resultat kommen muss, wenn man diese Substitutionen in umgekehrter Ordnung vornimmt, nämlich in $z = F(x, y)$ erst $y + \Delta y$ statt y und dann in der erhaltenen Entwickelung $x + \Delta x$ statt x setzt. Nöthigenfalls möge der Anfänger sich von der Richtigkeit dieser Behauptung durch eine nochmalige Entwicklung überzeugen. Man erhält dann wieder:

$$\Delta z = \left(\frac{dz}{dx}\right)\Delta x + \left(\frac{dz}{dy}\right)\Delta y + \left(\frac{d^2z}{dx^2}\right)\frac{\Delta x^2}{1 \cdot 2} + \left(\frac{d^2z}{dydx}\right)\Delta y \cdot \Delta x + \left(\frac{d^2z}{dy^2}\right)\frac{\Delta y^2}{1 \cdot 2} + \cdots$$

164.

Hieraus folgt ferner — weil nämlich beiderlei Verfahren gleiche Resultate, nämlich die totale Differenz von z geben — dass in beiden identischen Reihen auch die Coefficienten von gleichartigen Producten der Incremente Δx, Δy einander gleich sein müssen, nämlich:

$$\left(\frac{d^2z}{dxdy}\right) = \left(\frac{d^2z}{dydx}\right)$$

$$\left(\frac{d^{m+n}z}{dx^m dy^n}\right) = \left(\frac{d^{n+m}z}{dy^n dx^m}\right)$$

d. h. ob man eine Function zweier absolut (oder auch abhängig) veränderlicher Grössen $F(x,y)$ erst m mal in Bezug auf x und darauf noch n mal in Bezug auf y differentiirt, oder umgekehrt, erst n mal in Bezug auf y und darauf noch m mal in Bezug auf x differentiirt, das ist einerlei. Sei z. B. $z = x^3 y^5 + 6x^2 - y + 1$, so ist:

$$\left(\frac{dz}{dx}\right) = 3x^2y^5 + 12x; \qquad \left(\frac{dz}{dy}\right) = 5x^3y^4 - 1$$

$$\left(\frac{d^2z}{dxdy}\right) = 15x^2y^4; \qquad \left(\frac{d^2z}{dydx}\right) = 15x^2y^4$$

etc. etc.

165.

Wäre schliesslich z eine Function von drei veränderlichen Grössen, und mehr werden selten vorkommen, in Zeichen:

$$z = F(x,y,v)$$

wo alle drei Grössen x, y, v, absolut veränderlich (von einander unabhängig) sind, so findet man ganz auf die vorhin gezeigte Weise sowohl die partiellen Differenzen $\Delta_x z$, $\Delta_y z$, $\Delta_v z$, als auch die totale Differenz Δz. Weil in den practischen Anwendungen der Differential-Rechnung aber nie mehr als die niedrigsten Glieder erforderlich sind, welche die Factoren (Incremente) Δx, Δy, Δv in der ersten Potenz enthalten, und es weitläufig sein würde, auch die höhern in Δx^2 etc. multiplicirten Glieder zu entwickeln, (welches, wie gesagt, auf die vorhin gezeigte Weise geschehen könnte) so wollen wir hier auch nur die erwähnten niedrigsten Glieder entwickeln und die höhern bloss andeuten.

Aendert sich in $z = F(x, y, v)$ nur eine Grösse, z. B. x in $x + \Delta x$, so bleiben die beiden andern y, v constant (man denke sich dafür bestimmte Zahlen gesetzt) und man hat dann:

$$z + \Delta_x z = F(x,y,v) + F'_x(x,y,v) \cdot \Delta x + M\Delta x^2 + \cdots$$

Aendern sich zwei Grössen x in $x + \Delta x$ und y in $y + \Delta y$, so hat man:

$$z + \Delta_{xy} z = F(x,y,v) + \left(\frac{dz}{dx}\right) \cdot \Delta x + \left(\frac{dz}{dy}\right) \Delta y + M\Delta x^2 + M'\Delta x \Delta y + M''\Delta y^2 + ..$$

Um nun die totale Differenz von z zu erhalten, wollen wir der Abwechselung halber nach Ampère folgendermassen verfahren. Es ist:

1. $F(x + \Delta x, y, v) = F(x, y, v) + F'_x(x, y, v)\, \Delta x + M\Delta x^2 + \cdots$
2. $F(x, y, + \Delta y, v) = F(x, y, v) + F'_y(x, y, v)\, \Delta y + M'\Delta y^2 + \cdots$
3. $F(x, y, v + \Delta v) = F(x, y, v) + F'_v(x, y, v)\, \Delta v + M''\Delta v^2 + \cdots$

Diese drei Gleichungen haben Statt, welches auch die Werthe von x, y, v sein mögen. Man kann also auch in der zweiten linker und rechter Hand $x + \Delta x$ statt x, und in die dritte $x + \Delta x$, $y + \Delta y$ statt x und y setzen und nur M′, M″, welche (im Allgemeinen) Functionen von x, y, v sind, bekommen durch diese

Substitution andere Werthe. Man hat also, indem wir die erste Gleichung nur wieder abschreiben:

$$(1')\ F(x+\Delta x,y,v)=F(x,y,v)+F'_x(x,y,v)\Delta x+M\Delta x^2+\cdots$$

$$(2')\ F(x+\Delta x,y+\Delta y,v)=F(x+\Delta x,y,v)+F'_y(x+\Delta x,y,v)\Delta y+M_1\Delta y^2+\cdots$$

$$(3')\ F(x+\Delta x,y+\Delta y,v+\Delta v)=F(x+\Delta x,y+\Delta y,v)+F'_v(x+\Delta x,y+\Delta y,v)\cdot\Delta v+M_2\Delta v^2+$$

Addirt man diese drei Gleichungen, und lässt die rechter und linker Hand sich tilgenden Glieder aus, so hat man ganz einfach: *)

$$\begin{aligned} z+\Delta z = F(x,y,v) &+ F'_x(x,y,v)\Delta x + M\Delta x^2+\cdots \\ &+ F'_y(x,y,v)\Delta y + M_1\Delta y^2+\cdots \\ &+ F'_v(x,y,v)\Delta v + M_2\Delta v^2+\cdots \end{aligned}$$

$$\Delta z = F'_x(x,y,v)\Delta x + F'_y(x,y,v)\Delta y + F'_v(x,y,v)\Delta v+\cdots$$

$$\Delta z = \left(\frac{dz}{dx}\right)\Delta x + \left(\frac{dz}{dy}\right)\Delta y + \left(\frac{dz}{dv}\right)\Delta v+\cdots$$

---

*) Es ist hier rechter Hand der Factor von Δy, nämlich:

$$F'_y(x+\Delta x,y,v) = F'_y(x,y,v) + M_3\cdot\Delta x + M_4\Delta x^2+\cdots$$

Ebenso ist der Factor von Δv, nämlich:

$$\begin{aligned} F'_v(x+\Delta x,y+\Delta y,v) &= F'_v(x+\Delta x,y,v)+M_5\Delta y+M_6\Delta y^2+\cdots \\ &= F'_v(x,y,v)+M_7\Delta x+M_8\Delta x^2+\cdots \end{aligned}$$

Zwölftes Buch.

Maxima und Minima der Functionen mehrerer absolut veränderlichen Grössen.

166.

Die wichtigste Anwendung des vorhergehenden Buches besteht darin, diejenigen Werthe der absolut veränderlichen Grössen zu finden, für welche die daraus gebildete Function sich im Zustande des Maximums oder Minimums befindet.

Wir wollen der Einfachheit halber zuerst annehmen, es sei z eine gesonderte Function von nur zwei absolut veränderlichen Grössen x, y, in Zeichen:

$$z = \mathrm{F}(x, y)$$

und es seien x_0, y_0 die gesuchten unbekannten Werthe von x, y, für welche $z_0 = \mathrm{F}(x_0, y_0)$ ein Maximum oder Minimum ist.

167.

Lassen wir nun die beiden Grössen x_0, y_0 um Δx, Δy wachsen, so haben wir (§ 162):

$$\mathrm{F}(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) = \mathrm{F}(x_0, y_0) + \left(\frac{dz}{dx}\right)\Delta x + \left(\frac{dz}{dy}\right)\Delta y + \left(\frac{d^2 z}{dx^2}\right)\frac{\Delta x^2}{1 \cdot 2} + \dots$$

Um kein Maximum oder Minimum zu überspringen, müssen und können wir die Incremente Δx, Δy so klein denken, dass

die Summe der beiden niedrigsten Glieder, $\left(\frac{dz}{dx}\right)\Delta x + \left(\frac{dz}{dy}\right)\Delta y$ (im Fall > 0), grösser ist, als die Summe aller folgenden, welche die höheren Potenzen und Producte der Incremente enthalten. Dies beachtet, ist nun klar, dass wenn $F(x_0, y_0)$ ein Maximum oder Minimum sein soll, die Coefficienten von Δx, Δy (die partiellen Differential-Quotienten) $\left(\frac{dz}{dx}\right)$, $\left(\frac{dz}{dy}\right)$ einzeln, nothwendig $= 0$ sein müssen. Denn wenn, um alle möglichen Fälle durchzugehen, in der Reihe:

$$F(x_0,y_0)+\left(\frac{dz}{dx}\right)\Delta x+\left(\frac{dz}{dy}\right)\Delta y+\left(\frac{d^2z}{dx^2}\right)\frac{\Delta x^2}{1.2}+\left(\frac{d^2z}{dxdy}\right)\Delta x\Delta y+\left(\frac{d^2z}{dy^2}\right)\frac{\Delta y^2}{1.2}+\dots$$

1) beide Coefficienten $\left(\frac{dz}{dx}\right)$ und $\left(\frac{dz}{dx}\right)$ für $x = x_0$, $y = y_0$, positiv wären, so würde für positive Incremente, die Summe der beiden niedrigsten Glieder $\left(\frac{dz}{dx}\right)\Delta x + \left(\frac{dz}{dy}\right)\Delta y$ positiv sein und (weil dann diese Summe grösser ist, als die Summe aller folgenden Glieder, wenn auch alle negativ wären) zu $F(x_0, y_0)$ noch etwas hinzukommen, mithin $F(x_0, y_0)$ wachsen und also kein Maximum sein.

Für negative Incremente $-\Delta x$, $-\Delta y$ würde die Summe der beiden niedrigsten Glieder, mithin auch die der ganzen Reihe, negativ sein, also von $F(x_0, y_0)$ noch etwas abgehen, mithin $F(x_0, y_0)$ auch nicht im Zustande eines Minimums sein können.

2. Wären die beiden ersten Differential-Quotienten $\left(\frac{dz}{dx}\right)$, $\left(\frac{dz}{dy}\right)$ negativ, so würde jetzt umgekehrt für negative Incremente $-\Delta x$, $-\Delta y$ die Function $F(x_0, y_0)$ wachsen und für positive Incremente abnehmen, mithin weder ein Maximum noch ein Minimum sein können.

3. Wäre der eine Coefficient z. B. $\left(\frac{dz}{dx}\right)$ positiv, der andere $\left(\frac{dz}{dy}\right)$ negativ, so wäre für $+\Delta x$ und $-\Delta y$ die Summe der beiden niedrigsten Glieder $\left(\frac{dz}{dx}\right)\Delta x + \left(\frac{dz}{dy}\right)\Delta y$ wieder positiv und $F(x_0, y_0)$ würde für diese Incremente wachsen, mithin kein Maximum sein.

Für $-\Delta x$ und $+\Delta y$ wäre jene Summe negativ, mithin $F(x_0, y_0)$ abnehmend, also auch kein Minimum.

168.

Sind nun aber für $x = x_0$ und $y = y_0$ in der vorhergehenden Reihe die Coefficienten von Δx und Δy, nämlich $\left(\frac{dz}{dx}\right)$ und $\left(\frac{dz}{dy}\right)$ einzeln, $= 0$, so bleibt uns noch:

$$F(x_0 y_0 + \left(\frac{d^2z}{dx^2}\right)\frac{\Delta x^2}{1\cdot 2} + \left(\frac{d^2z}{dydx}\right)\Delta x\Delta y + \left(\frac{d^2z}{dy^2}\right)\frac{\Delta y^2}{1\cdot 2} + \cdots\cdot$$

und es kann $F(x_0, y_0)$ (die Ordinate z_0) ein Maximum oder Minimum sein. Ob aber überall ein Maximum oder Minimum, und welches von beiden stattfindet, darüber entscheiden nun die drei folgenden Glieder, indem wir Δx, Δy so klein annehmen können, dass die Summe dieser drei Glieder grösser ist,*) als die Summe aller folgenden.

Wäre nun die Summe dieser drei Glieder positiv unter allen Umständen, d. h. man möge die Incremente Δx, Δy positiv oder negativ, oder auch das eine oder andere $= 0$ nehmen, so würde $F(x_0, y_0)$ oder die Ordinate z_0 ein Minimum sein, weil dann unter allen Umständen die Ordinate wachsen würde, ihr Fusspunct möge in der Ebene xy, in der Abscissenachse nach rechts oder links ($\pm\Delta x$, $\Delta y = 0$) oder senkrecht darauf ($\Delta x = 0$, $\pm\Delta y$) oder nach einer dazwischen fallenden Richtung ($\pm\Delta x$, $\pm\Delta y$), ($\pm\Delta x$, $\mp\Delta y$) fortgleiten.

Wäre dagegen die Summe jener drei Glieder unter allen Umständen immer negativ, so würde offenbar $F(x_0, y_0)$ (die Ordinate z_0) ein Maximum sein.

169.

Um nun ein Merkzeichen zu finden, wonach man entscheiden kann, ob die Summe der drei Glieder:

$$\left(\frac{d^2z}{dx^2}\right)\frac{\Delta x^2}{1\cdot 2} + \left(\frac{d^2z}{dxdy}\right)\Delta x\Delta y + \left(\frac{d^2z}{dy^2}\right)\frac{\Delta y^2}{1\cdot 2}$$

---

*) Vorausgesetzt, dass die drei Coefficienten von Δx^2, $\Delta x\Delta y$, Δy^2 nicht jeder einzeln $= 0$ sind, in welchem Falle man noch weiter gehen müsste, was jedoch unerträglich weitläufig sein würde.

oder indem wir, des bequemeren Schreibens halber, die (hier nur in Betracht kommenden) Coefficienten mit A, B, C bezeichnen:

$$A\frac{\Delta x^2}{1\cdot 2} + B\Delta x\Delta y + C\frac{\Delta y^2}{1\cdot 2}$$

$$\tfrac{1}{2}(A\Delta x^2 + 2B\Delta x\Delta y + C\Delta y^2)$$

unter allen Umständen positiv oder negativ wird, bemerken wir zuerst, dass A und C nothwendig einerlei Vorzeichen haben müssen und zwar beide +, wenn die Summe positiv, und −, wenn die Summe negativ sein soll. Denn wäre z. B. A positiv und C negativ, so würden für $\Delta x = 0$ die beiden erstern Glieder verschwinden und die Summe nicht positiv sein können. Für $\Delta y = 0$ dagegen würden die beiden letzten Glieder verschwinden und die Summe also nicht negativ sein können. Um nun das Vorzeichen dieser Summe von dem Vorzeichen der Incremente ganz unabhängig zu machen, setzen wir dieselbe (indem wir den Factor $\frac{1}{2}$ weglassen können) in folgende Form:

$$A\Delta x^2 + 2B\Delta x\Delta y + C\Delta y^2 + \frac{B^2}{A}\Delta y^2 - \frac{B^2}{A}\Delta y^2$$

$$A\left(\Delta x + \frac{B}{A}\Delta y\right)^2 + \left(C - \frac{B^2}{A}\right)\Delta y^2$$

und dieser Ausdruck ist gewiss unter allen Umständen positiv (negativ), wenn gleichzeitig A und C positiv (negativ) und ausserdem $C - \frac{B^2}{A} \geqq 0$, d. h. $AC \geqq B^2$ ist.

170.

Zur Bestimmung der Minima und Maxima einer Function zweier absolut veränderlichen Grössen:

$$z = F(x, y)$$

hat man also gleichzeitig:

$$1.\quad \left(\frac{dz}{dx}\right) = 0; \qquad \left(\frac{dz}{dy}\right) = 0;$$

$$2.\quad \left(\frac{d^2z}{dx^2}\right) = \pm; \qquad \left(\frac{d^2z}{dy^2}\right) = \pm;$$

$$3.\quad \left(\frac{d^2z}{dx^2}\right)\cdot\left(\frac{d^2z}{dy^2}\right) \geqq \left(\frac{d^2z}{dxdy}\right)^2$$

d. h. man differentiire die Gleichung $z = F(x,y)$ einmal in Bezug auf x, und einmal in Bezug auf y, setze beide Differential-Quotienten einzeln $= 0$, nämlich $\left(\frac{dz}{dx}\right) = F'_x(x,y) = 0$ und $\left(\frac{dz}{dy}\right) = F'_y(x,y) = 0$. Die Werthe, welche man aus diesen beiden ersten Bedingungsgleichungen für x und y findet, substituire man in die Ausdrücke (2). Je nachdem dann diese positiv oder negativ werden, giebt es ein Minimum oder Maximum, vorausgesetzt, dass gleichzeitig auch die dritte Bedingung Statt findet.

In der Regel erkennt man aber schon aus der Natur der Function, ob ein Maximum oder Minimum vorhanden ist, und man hat dann nicht nöthig, die immer weitläufigen Rechnungen und Substitution für die Bedingungen (2) und (3) vorzunehmen.

171.

Hätte man eine gesonderte Function von mehr als zwei absolut veränderlichen Grössen, wäre z. B. in Zeichen:

$$u = F(x, y, z, v \cdots)$$

so folgt aus den vorhergehenden Betrachtungen (und noch einfacher nach der Infinitesimalmethode), dass man zur Bestimmung der Werthe von $x, y, z. v \cdots$, für welche u ein Maximum oder Minimum wird, die Function in Bezug auf jede der absolut veränderlichen Grössen differentiiren, und die erhaltenen partiellen Differential-Quotienten einzeln $= 0$ setzen muss, nämlich:

$$\left(\frac{du}{dx}\right) = 0; \quad \left(\frac{du}{dy}\right) = 0; \quad \left(\frac{du}{dz}\right) = 0; \quad \left(\frac{du}{dv}\right) = 0; \cdots$$

Aus diesen gleichzeitig Statt findenden Bedingungen erhält man die einem Maximum oder Minimum entsprechenden Werthe von $x, y, z, v \cdots$, vorausgesetzt, dass der Eliminationsprocess nicht zu grosse Schwierigkeiten bietet. Aber auch hier ein Kennzeichen aufzustellen, ob ein Maximum oder Minimum und welches von beiden Statt findet, würde auf zu grosse Weitläufigkeiten führen. Man muss dieses aus der Natur der Function erkennen.

172.

Aufgabe. Es sei gegeben:

$$z = x^2 + xy + y^2 - 5x - 4y + 1$$

Man sucht die Werthe von x und y, für welche z ein Maximum oder Minimum wird.

Auflösung. Man hat hier:

$$\left(\frac{dz}{dx}\right) = 2x + y - 5 = 0$$

$$\left(\frac{dz}{dy}\right) = x + 2y - 4 = 0$$

und hieraus $x = 2$ und $y = 1$. Ferner ist:

$$\left(\frac{d^2z}{dx^2}\right) = +2; \qquad \left(\frac{d^2z}{dy^2}\right) = +2; \qquad \left(\frac{d^2z}{dxdy}\right) = 1$$

$$\left(\frac{d^2z}{dx^2}\right) \cdot \left(\frac{d^2z}{dy^2}\right) > \left(\frac{d^2z}{dxdy}\right)^2$$

Für $x = 2$ und $y = 1$ wird also z ein Minimum, $= -6$.

173.

Aufgabe. Eine Zahl, a, in drei solche Theile zu theilen, dass das Product aus der vierten Potenz des ersten, dem Cubus des zweiten und dem Quadrate des dritten Theils ein Maximum wird.

Auflösung. Sei x der erste, y der zweite, also $a - x - y$ der dritte Theil, so hat man aus:

$$z = x^4 \cdot y^3 (a - x - y)^2$$

$$\left(\frac{dz}{dx}\right) = y^3 (a - x - y)^2 \, 4x^3 - x^4 y^3 \cdot 2(a - x - y) = 0$$

$$\left(\frac{dz}{dy}\right) = x^4 (a - x - y)^2 \cdot 3y^2 - x^4 y^3 \cdot 2(a - x - y) = 0$$

oder kürzer, weil die Theile x, y und $a - x - y$ nicht $= 0$ sein können und man damit dividiren kann:

$$2a - 3x - 2y = 0$$
$$3a - 3x - 5y = 0$$

Hieraus $x = \frac{4}{9}a$; $y = \frac{3}{9}a$; $a - x - y = \frac{2}{9}a$.

Für diese drei Theile von a wird z ein Maximum, indem von einem Minimum hier nicht die Rede sein kann und man also das weitläufige Kennzeichen dafür nicht aufzustellen braucht.

174.

Aufgabe. Eine grade Linie, a, in drei solche Theile zu theilen, dass der Inhalt des daraus construirten Dreiecks ein Maximum wird.

Auflösung. Sei x die eine, y die zweite, also $a-x-y$ die dritte Seite, so ist der Flächeninhalt:

$$F = \sqrt{\tfrac{1}{2}a\cdot(\tfrac{1}{2}a-x)(\tfrac{1}{2}a-y)(x+y-\tfrac{1}{2}a)}$$

oder, zufolge der Anmerkung zu § 98:

$$z = (\tfrac{1}{2}a-x)(\tfrac{1}{2}a-y)(x+y-\tfrac{1}{2}a)$$

$$\left(\frac{dz}{dx}\right) = (\tfrac{1}{2}a-y)(a-2x-y) = 0$$

$$\left(\frac{dz}{dy}\right) = (\tfrac{1}{2}a-x)(a-2y-x) = 0$$

Die Factoren $\tfrac{1}{2}a-x$ und $\tfrac{1}{2}a-y$ können nicht 0 sein, weil dann $x=y=\tfrac{1}{2}a$, mithin die dritte Seite $=0$ und also gar kein Dreieck vorhanden wäre. Es müssen also die beiden anderen Factoren $=0$ sein. Daraus ergiebt sich $x=\tfrac{1}{3}a$; $y=\tfrac{1}{3}a$; $a-x-y=\tfrac{1}{3}a$.

Da ferner für diese Werthe von x und y

$$\left(\frac{d^2z}{dx^2}\right) = -2(\tfrac{1}{2}a-y) = -\tfrac{1}{3}a$$

$$\left(\frac{d^2z}{dy^2}\right) = -2(\tfrac{1}{2}a-x) = -\tfrac{1}{3}a$$

$$\left(\frac{d^2z}{dxdy}\right) = 2(x+y)-\tfrac{3}{2}a = -\tfrac{1}{6}a$$

so ist klar, dass ein Maximum Statt findet, was man auch unmittelbar einsieht, indem von einem Minimum hier nicht die Rede sein kann.

Unter allen Dreiecken von gleichem Umfange hat also das gleichseitige den grössten Inhalt.

175.

Aufgabe. Die Dimensionen eines rechtwinkligen und geschlossenen Parallelepipedums zu bestimmen, welches bei gegebenem Inhalt V die kleinste Oberfläche hat.

Auflösung. Seien x, y die gesuchte Breite und Länge, so ist die gesuchte Höhe $z=\frac{V}{xy}$ und die Oberfläche:

$$F = 2\left(xy + \frac{V}{y} + \frac{V}{x}\right)$$

$$\left(\frac{dF}{dx}\right) = 2\left(y - \frac{V}{x^2}\right) = 0$$

$$\left(\frac{dF}{dy}\right) = 2\left(x - \frac{V}{y^2}\right) = 0$$

hieraus folgt: $x^2 y = xy^2 = V$, mithin: $x = y = z = \sqrt[3]{V}$. Ferner ist:

$$\left(\frac{d^2F}{dx^2}\right) = \frac{4V}{x^3} = +4$$

$$\left(\frac{d^2F}{dy^2}\right) = \frac{4V}{y^3} = +4$$

$$\left(\frac{d^2F}{dxdy}\right) = 2.$$

Unter allen rechtwinkligen Parallelepipeden von gleichem Inhalte, ist es also der Cubus, welcher die kleinste Oberfläche hat.

176a.

Aufgabe. In einem Kreise das an Inhalt grösste Dreieck zu beschreiben.

Auflösung. Sei ABD das Dreieck. Denkt man vom Mittelpunct nach einer Ecke, A, den Radius $CA = r$ gezogen, setzt die zu findenden Winkel $BAC = x$, $CAD = y$ und fällt von C auf AB und AD Perpendikel, so ist offenbar: $AB = 2r\cos x$ und $AD = 2r\cos y$. Da nun das von B auf AD gefällte Perpendikel $= AB \cdot \sin(x + y)$, also auch $= 2r\cos x \cdot \sin(x + y)$, so ist (§ 98, Randanmerkung):

$$F = 2r^2 \cos x \cdot \cos y \cdot \sin(x + y)$$

$$\left(\frac{dF}{dx}\right) = \cos x \cdot \cos(x + y) - \sin x \cdot \sin(x + y) = 0$$

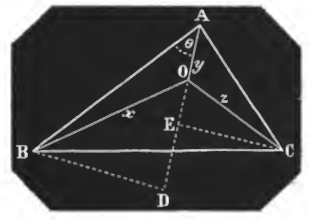
$$\left(\frac{dF}{dx}\right) = \cos(2x + y) = 0, \quad 2x + y = 90^0$$

$$\left(\frac{dF}{dy}\right) = \cos(x + 2y) = 0, \quad x + 2y = 90^0$$

Es ist mithin $x = y = 30^0$ und folglich das verlangte Dreieck ein gleichseitiges.

176b.

Aufgabe. Man sucht einen Punct, O, so, dass die Summe seiner drei Entfernungen x, y, z von den Ecken eines gegebenen Dreiecks, ABC, ein Minimum ist.



Auflösung. Am leichtesten verfährt man auf folgende indirecte Weise:

Es sei der Winkel OAB $=\theta$ und OAC $= A - \theta$, so ist:

$$x^2 = c^2 + y^2 - 2cy\cos\theta$$
$$z^2 = b^2 + y^2 - 2by\cos(A-\theta)$$

$$u = y + \sqrt{c^2+y^2-2cy\cos\theta} + \sqrt{b^2+y^2-2by\cos(A-\theta)}$$

$$1.\quad \left(\frac{du}{dy}\right) = 1 + \frac{y - c\cdot\cos\theta}{x} + \frac{y - b\cos(A-\theta)}{z} = 0$$

$$2.\quad \left(\frac{du}{d\theta}\right) = \frac{cy\cdot\sin\theta}{x} - \frac{by\sin(A-\theta)}{z} = 0$$

Aus der zweiten Bedingungsgleichung folgt:

$$\frac{c\cdot\sin\theta}{x} = \frac{b\cdot\sin(A-\theta)}{z}$$

Fällt man von B und C die Perpendikel BD, CE, so ist: $c\cdot\sin\theta = \mathrm{BD}$ und $b\sin(A-\theta) = \mathrm{CE}$, mithin:

$$\frac{\mathrm{BD}}{x} = \frac{\mathrm{CE}}{z}$$

Diese Quotienten sind aber die sinus der spitzen Winkel BOD und COE und da ihre sinus gleich sind, so sind auch diese beiden Winkel und folglich auch ihre Nebenwinkel gleich.

Ferner ist nun: $y - c\cdot\cos\theta = -\mathrm{OD}$ und $y - b\cdot\cos(A-\theta) = -\mathrm{OE}$. Substituirt man dies in die erste Bedingungsgleichung, so ist:

$$1 - \frac{\mathrm{OD}}{x} - \frac{\mathrm{OE}}{z} = 0$$

Die Quotienten $\frac{\mathrm{OD}}{x}$, $\frac{\mathrm{OE}}{z}$ sind die cosinus der beiden gleichen Winkel BOD, COE. Da nun diese cosinus gleich sind und ihre Summe $= 1$ ist, so ist jeder $= \frac{1}{2}$ und folglich BOD $=$ COE $= 60^{\circ}$.

Der fragliche Punct hat also eine solche Lage, dass jeder der drei um ihn liegenden Winkel = 120° ist. Beschreibt man also über zwei Seiten des Dreiecks ABC gleichseitige Dreiecke und um jedes einen Kreis, so schneiden sich beide Kreise in dem gesuchten Punct O (Geometrie § 90).

177.

Im § 162 fanden wir aus der Function $z = F(x, y)$ für die totale Differenz derselben, die Reihe:

$$\Delta z = \left(\frac{dz}{dx}\right) \cdot \Delta x + \left(\frac{dz}{dy}\right) \Delta y + \left(\frac{d^2 z}{dx^2}\right) \cdot \frac{\Delta x^2}{1 \cdot 2} + \left(\frac{d^2 z}{dx dy}\right) \Delta x \Delta y + \left(\frac{d^2 z}{dy^2}\right) \frac{\Delta y^2}{1 \cdot 2} + ..$$

und man ist nun übereingekommen hier die beiden ersten in der Regel nur erforderlichen Glieder, welche keine Potenzen und Producte der Incremente enthalten, das totale Differential der Function zu nennen und mit dz zu bezeichnen. Setzen wir der Symmetrie halber auch dx, dy statt Δx, Δy, so ist das totale Differential, welches aus der Summe der beiden partiellen Differentialen besteht, in Zeichen:

$$dz = \left(\frac{dz}{dx}\right) dx + \left(\frac{dz}{dy}\right) \cdot dy.$$

178.

Hätte man eine gesonderte Function von mehr als zwei absolut veränderlichen Grössen, wäre z. B.:

$$u = F(x, y, z, \cdots)$$

so erhellet schon aus § 177, dass das totale Differential:

$$du = \left(\frac{du}{dx}\right) dx + \left(\frac{du}{dy}\right) dy + \left(\frac{du}{dz}\right) dz + \cdots$$

Wäre z. B. $u = xyz$, so ist:

$$du = yz \cdot dx + xz \cdot dy + xy \cdot dz$$

179.

Aufgabe. Man differentiire zur Uebung noch folgende Functionen, in welchen x, y absolut veränderliche Grössen sind:

1. $z = x^m y^n$

2. $z = \frac{ay}{\sqrt{x^2+y^2}}$

3. $z = \text{arc tg}\,\frac{x}{y}$.

Auflösung. Man findet:

1. $dz = mx^{m-1}y^n dx + nx^m y^{n-1} dy$

$$dz = x^{m-1}y^{n-1}(mydx + nxdy)$$

2. $\left(\frac{dz}{dx}\right) = -ay(x^2+y^2)^{-\frac{3}{2}}x$

$$\left(\frac{dz}{dy}\right) = a(x^2+y^2)^{-\frac{1}{2}} - ay(x^2+y^2)^{-\frac{3}{2}}y$$

$$dz = \frac{-axydx + ax^2dy}{\sqrt{(x^2+y^2)^3}}$$

3. $\left(\frac{dz}{dx}\right) = \frac{y}{y^2+x^2}$; $\left(\frac{dz}{dy}\right) = -\frac{x}{y^2+x^2}$

$$dz = \frac{ydx - xdy}{y^2+x^2}.$$

180.

* Man kann bei Functionen von mehr als einer absolut veränderlichen Grösse auch höhere, sowohl partielle, als totale Differentiale entwickeln. So folgt z. B. aus:

$$z = F(x, y)$$

indem wir sowohl x als y sich ändern lassen, erst das totale Differential:

$$dz = \left(\frac{dz}{dx}\right)dx + \left(\frac{dz}{dy}\right)dy$$

Da nun hier die Coefficienten von dx, dy (im Allgemeinen) Functionen von x und y sind, nämlich $\left(\frac{dz}{dx}\right) = F'_x(x, y)$ etc., so kann man wieder $x + \Delta x$, $y + \Delta y$ statt x und y setzen und entwickeln, indem man die Factoren dx, dy als constant betrachtet. Behält man von der Entwickelung nur die niedrigsten Glieder und schreibt wieder dx, dy statt Δx, Δy, so hat man das totale

zweite Differential von z nämlich: d^2z. Es leuchtet ein, dass man dies einfacher erhält, indem man obige Gleichung nur nochmals in Bezug auf x und y differentiirt. Dann ist:

$$d^2z = \left(\frac{d^2z}{dx^2}\right)dx^2 + \left(\frac{d^2z}{dxdy}\right)dxdy + \left(\frac{d^2z}{dydx}\right)dydx + \left(\frac{d^2z}{dy^2}\right)dy^2$$

$$d^2z = \left(\frac{d^2z}{dx^2}\right)dx^2 + 2\left(\frac{d^2z}{dxdy}\right)dxdy + \left(\frac{d^2z}{dy^2}\right)dy^2$$

wollte man so allgemein weiter gehen, so würde sich zeigen, dass bei jedem folgenden totalen höheren Differential die Binomial-Coefficienten zum Vorschein kommen.

181.

* Hat man eine verwickelte Function mehrerer absolut veränderlicher Grössen, die man auf die abhängig veränderliche nicht reduciren kann, oder nicht reduciren will, so lässt sich dennoch, sowohl das totale als partielle Differential leicht bestimmen. Durch ganz dieselben Betrachtungen, wie in §§ 134, 136 und 137, ergiebt sich nämlich, dass man eine solche auf 0 reducirte Function, formell nur grade so zu differentiiren braucht, als wenn alle Grössen absolut veränderlich wären, und das Differential $= 0$ zu setzen berechtigt ist. Sei z. B.:

$$F(x, y, z) = 0,$$

wo x, y die absolut veränderlichen Grössen sein sollen und z die abhängige, so ist für das partielle Differential von z in Bezug auf x, also y constant (§ 136):

$$\left(\frac{dF}{dx}\right)dx + \left(\frac{dF}{dz}\right)dz = 0$$

und in Bezug auf y, also jetzt x constant:

$$\left(\frac{dF}{dy}\right)dy + \left(\frac{dF}{dz}\right)dz = 0$$

und für das totale Differential

$$\left(\frac{dF}{dx}\right)dx + \left(\frac{dF}{dy}\right)dy + \left(\frac{dF}{dz}\right)dz = 0$$

Für die höheren Differentiale findet dieselbe Regel Statt. Die allgemeinen Formeln werden hier aber unerträglich weitläufig.

Beispiel. Die Gleichung für die Oberfläche der Kugel ist (höhere Geometrie § 134):

$$x^2 + y^2 + z^2 = r^2$$

Aendert sich bloss x, so ist: $xdx + zdz = 0$. Aendert sich bloss y, so ist: $ydy + zdz = 0$. Aendern sich beide zugleich, so ist:

$$xdx + ydy + zdz = 0$$

$$dz = -\frac{xdx + ydy}{z}$$

182.

* Aufgabe. Es ist die Gleichung irgend einer krummen Fläche allgemein:

$$z = F(x, y) \cdots\cdots\cdots\cdots (1)$$

und darin ein Punct, M, durch seine rechtwinkligen Coordinaten x, y, z gegeben. Man sucht die Gleichung der durch diesen Punct gehenden Tangential-Ebene.

Auflösung. Lassen wir bloss die Abscisse x um Δx wachsen, so gehen wir zu einem andern Punct, M', der Fläche über, dessen Coordinaten $x + \Delta x$, y, $z + \Delta_x z$ sind. Lassen wir dagegen bloss die Ordinate y um Δy wachsen, also x constant bleiben, so gehen wir zu einem dritten Punct, M'', der krummen Fläche über, dessen Coordinaten x, $y + \Delta y$, $z + \Delta_y z$ sind.

Die Gleichung einer Ebene hat die Form:

$$\mathrm{z} = \mathrm{Ax} + \mathrm{By} + \mathrm{C} \cdots\cdots\cdots\cdots (2)$$

damit diese Ebene zunächst durch die angegebenen drei Puncte M, M', M'' geht, müssen die Coefficienten A, B, C so bestimmt werden, dass wenn man x und y statt x, y setzt, $\mathrm{z} = z$ und wenn man $x + \Delta x$ und y statt x, y setzt, $\mathrm{z} = z + \Delta_x z$, und wenn man x und $y + \Delta y$ statt x, y setzt, $\mathrm{z} = z + \Delta_y z$ wird.

Dies giebt uns zur Bestimmung der Coefficienten A, B, C folgende drei Bedingungsgleichungen:

$$z = \mathrm{A}x + \mathrm{B}y + \mathrm{C} \cdots\cdots\cdots\cdots (3)$$

$$z + \Delta_x z = \mathrm{A}(x + \Delta x) + \mathrm{B}y + \mathrm{C} \cdots\cdots (4)$$

$$z + \Delta_y z = \mathrm{A}x + \mathrm{B}(y + \Delta y) + \mathrm{C} \cdots\cdots (5)$$

Subtrahirt man (3) von (4) und (3) von (5), so hat man:

$$\Delta_x z = A\Delta x; \qquad A = \frac{\Delta_x z}{\Delta x}$$

$$\Delta_y z = B\Delta y; \qquad B = \frac{\Delta_y z}{\Delta y}$$

Lässt man nun Δx, Δy bis zu Null convergiren, also nach der Grenzmethode die drei Puncte zusammenfallen, oder noch deutlicher, nach der Infinitesimalmethode, die Incremente Δx, Δy unendlich klein werden, so ist auch das zwischen den drei Puncten M, M', M'' liegende unendlich kleine Flächenstück als eben zu betrachten, und da dieses mit der gesuchten Ebene (weil drei Puncte gemein habend) zusammenfällt, so ist auch letztere nothwendig eine Berührungs-Ebene. Die gesuchten Coefficienten A, B sind dann aber offenbar die aus (1) gezogenen partiellen Differential-Quotienten in Bezug auf x und y, nämlich: $A = \left(\frac{dz}{dx}\right)$, $B = \left(\frac{dz}{dy}\right)$. Die Gleichung der Berührungs-Ebene ist also näher bestimmt:

$$\mathrm{z} = \left(\frac{dz}{dx}\right)\mathrm{x} + \left(\frac{dz}{dy}\right)\mathrm{y} + \mathrm{C} \cdots\cdots\cdots\cdots (6)$$

Um noch C zu bestimmen, beachte man, dass zufolge (3) $C = z - Ax - By = z - \left(\frac{dz}{dx}\right)x - \left(\frac{dz}{dy}\right)y$. Dies in (6) substituirt, ist die Gleichung der Tangential-Ebene:

$$\mathrm{z} = \left(\frac{dz}{dx}\right)\mathrm{x} + \left(\frac{dz}{dy}\right)\mathrm{y} + \left\{z - \left(\frac{dz}{dx}\right)x - \left(\frac{dz}{dy}\right)y\right\}$$

Man hätte auch (3) von (6) subtrahiren können und vorstehende Gleichung in folgender kürzeren Form erhalten:

$$\mathrm{z} - z = \left(\frac{dz}{dx}\right)(\mathrm{x} - x) + \left(\frac{dz}{dy}\right)(\mathrm{y} - y)$$

und folglich die beiden Projections-Gleichungen der Normale (höhere Geometrie § 128):

$$\mathrm{x} - x + \left(\frac{dz}{dx}\right)(\mathrm{z} - z) = 0$$

$$\mathrm{y} - y = \left(\frac{dz}{dy}\right)(\mathrm{z} - z) = 0.$$

183.

* Um schliesslich noch den Winkel U zu bestimmen, welchen die Tangential-Ebene mit der Ebene der x, y bildet und der später bei der Complanation der Flächen erforderlich ist, hat man (höhere Geometrie § 126):

$$\cos U = \frac{1}{\sqrt{1+\left(\frac{dz}{dx}\right)^2+\left(\frac{dz}{dy}\right)^2}}$$

Wäre die Gleichung der Fläche in verwickelter Form gegeben: $F(x,y,z)=0$, so hat man:

$$\left(\frac{dF}{dx}\right)dx+\left(\frac{dF}{dy}\right)dy+\left(\frac{dF}{dz}\right)dz=0$$

und hieraus: $$\left(\frac{dz}{dx}\right)=-\frac{\left(\frac{dF}{dx}\right)}{\left(\frac{dF}{dz}\right)}; \qquad \left(\frac{dz}{dy}\right)=-\frac{\left(\frac{dF}{dy}\right)}{\left(\frac{dF}{dz}\right)}$$

mithin die Gleichung der Tangential-Ebene:

$$(\mathrm{z}-z)\cdot\left(\frac{dF}{dz}\right)+(\mathrm{x}-x)\left(\frac{dF}{dx}\right)+(\mathrm{y}-y)\left(\frac{dF}{dy}\right)=0$$

$$\cos U = \frac{\left(\frac{dF}{dz}\right)}{\sqrt{\left(\frac{dF}{dz}\right)^2+\left(\frac{dF}{dx}\right)^2+\left(\frac{dF}{dy}\right)^2}}$$

Die beiden Projectionsgleichungen der Normale sind in diesem Falle:

$$\mathrm{x}-x=\frac{\left(\frac{dF}{dx}\right)}{\left(\frac{dF}{dz}\right)}\cdot(\mathrm{z}-z)$$

$$\mathrm{y}-y=\frac{\left(\frac{dF}{dy}\right)}{\left(\frac{dF}{dz}\right)}\cdot(\mathrm{z}-z)$$

184.

Aufgabe. Es ist die Gleichung der Kugel gegeben:

$$z^2 + x^2 + y^2 = r^2.$$

Man sucht die Gleichungen der durch einen gegebenen Punct, $\mathrm{M}(x, y, z)$, der Oberfläche gehenden Tangential-Ebene und Normale.

Auflösung. Man hat hier:

$$\left(\frac{dz}{dx}\right) = -\frac{x}{z}; \qquad \left(\frac{dz}{dy}\right) = -\frac{y}{z}$$

daher die Gleichung der Tangential-Ebene

$$z(\mathrm{z} - z) + x(\mathrm{x} - x) + y(\mathrm{y} - y) = 0$$

$$\text{oder: } z\mathrm{z} + x\mathrm{x} + y\mathrm{y} = r^2$$

die Gleichungen der Normallinie sind:

$$\mathrm{x} - x = \frac{x}{z}(\mathrm{z} - z) \text{ hieraus: } \mathrm{x} = \frac{x\mathrm{z}}{z}$$

$$\mathrm{y} - y = \frac{y}{z}(\mathrm{z} - z) \quad \text{„} \quad \mathrm{y} = \frac{y\mathrm{z}}{z}$$

$$\cos \mathrm{U} = \frac{z}{\sqrt{z^2 + x^2 + y^2}} = \frac{z}{r}$$

Für $x = 0$ und $y = 0$, also $z = r$ ist $\mathrm{x} = 0$, $\mathrm{y} = 0$, $\mathrm{z} = r$ und $\cos \mathrm{U} = 1$, $\mathrm{U} = 0$. Die Normallinie geht durch den Anfangspunct, fällt also mit dem Radius zusammen. Die Tangential-Ebene geht mit der Ebene der x, y in dem Abstande $= r$ parallel. Für $x = r$, $y = 0$ also $z = 0$, ist $\cos \mathrm{U} = 0$, $\mathrm{U} = 90^\circ$.

Dreizehntes Buch.

Maxima und Minima mit Nebenbedingungen.

185.

Man habe die beiden gleichzeitigen Gleichungen:

$$z = x^3 + y^3 \cdots\cdots\cdots\cdots (1)$$
$$y = 9 - 4x \cdots\cdots\cdots\cdots (2)$$

Für $x = 0, 1, 2, 3 \cdots$ wird $y = 9, 5, 1, -3, \cdots$ Für das erste Paar Werthe von x, y wird $z = 729$, für das zweite Paar ist $z = 126$. Da nun für verschiedene zusammengehörige Werthe von x, y die daraus gebildete Function z verschiedene Werthe bekommt, so kann man fragen, für welche zusammengehörige Werthe von x, y wird z ein Maximum oder Minimum, und dies ist es, was man ein Maximum oder Minimum mit Nebenbedingungen nennt.

Man sieht nämlich, dass wegen der vorgeschriebenen und zu berücksichtigenden Bedingung, dass $y = 9 - 4x$ sein soll, man in (1) die veränderlichen Grössen x, y nicht als unabhängig von einander betrachten darf.

Da nun für den unbekannten Werth von x, für welchen z ein Maximum oder Minimum wird, zugleich auch $y = 9 - 4x$ sein soll, so darf man offenbar aus (1) die von x abhängige Grösse y eliminiren und hat dann:

$$z = x^3 + (9 - 4x)^3 \cdots\cdots\cdots\cdots (3)$$

In dieser Gleichung ist offenbar die Bedingung, dass immer $y = 9 - 4x$ ist, mit enthalten, also auch für den Werth von x, für welchen jetzt z ein Maximum oder Minimum wird. Daher:

$$\frac{dz}{dx} = 3x^2 - 12(9 - 4x)^2 = 0 \cdots\cdots\cdots\cdots (4)$$

woraus: $x = 2$; und $x = \frac{18}{7}$

$$\frac{d^2z}{dx^2} = 6x + 96\,(9 - 4x).$$

Es ist also für $x = 2$, $y = 1$, die Grösse $z = 9$ ein Minimum. Für $x = \frac{18}{7}$, $y = -\frac{9}{7}$ ist $z = 14\frac{41}{49}$ ein Maximum.

Die Elimination der abhängig veränderlichen Grösse war im obigen Beispiel sehr leicht zu bewirken. In vielen andern Fällen ist das aber nicht der Fall. Dann erreicht man oftmals aber doch seinen Zweck, indem man alle beide Gleichungen in Bezug auf die absolut veränderliche Grösse x differentiirt, und dann den Differential-Quotienten $\frac{dy}{dx}$ eliminirt. Dass dies immer erlaubt ist, wollen wir zuerst an obigem einfachen Beispiel zeigen. Aus den beiden gleichzeitigen Gleichungen:

$$z = x^3 + y^3 \cdots\cdots\cdots\cdots (1)$$

$$y = 9 - 4x \cdots\cdots\cdots\cdots (2)$$

folgt: $$\left(\frac{dz}{dx}\right) = 3x^2 + 3y^2 \cdot \frac{dy}{dx} = 0 \cdots\cdots (3)$$

$$\frac{dy}{dx} = -4 \cdots\cdots\cdots\cdots (4)$$

In (3) steht offenbar y als Stellvertreter für $9 - 4x$, und $\frac{dy}{dx}$ als Stellvertreter für das durch dx dividirte Differential von $9 - 4x$ und dies ist, wie aus (2) folgt, $= -4$. Wir können also aus (3) $\frac{dy}{dx}$ eliminiren und haben dann:

$$3x^2 - 12y^2 = 0$$

oder: $$x \mp 2y = 0 \cdots\cdots\cdots\cdots (5)$$

Statt nun in diese Gleichung den Werth von y zu substituiren, kann man auch (im Fall die Reduction auf y in (2) nicht möglich oder zu weitläufig sein würde) die Gleichung (5) mit

der Bedingungsgleichung (2) verbinden und daraus eine neue Beziehung zwischen x und y ableiten, woraus sich dann das Verhältniss dieser Grössen zu einander oftmals leichter ergiebt. In vorliegendem leichten Beispiel hat man diese Grössen selbst. Es folgt nämlich aus (5) und (2), nämlich:

$$x \mp 2y = 0$$

$$4x + y = 9$$

für das obere Vorzeichen: $x = 2$, $y = 1$; für das untere Vorzeichen: $x = \frac{18}{7}$, $y = -\frac{9}{7}$.

Um zu entscheiden, ob für dieses Werthe-Paar z ein Maximum oder Minimum ist, hat man aus (3):

$$\left(\frac{d^2 z}{dx^2}\right) = 6x + 6y \cdot \frac{dy^2}{dx^2} + 3y^2 \frac{d^2 y}{dx^2}$$

Hierin die Werthe von $\frac{dy}{dx} = -4$ und $\frac{d^2 y}{dx^2} = 0$ substituirt, kommt:

$$\left(\frac{d^2 z}{dx^2}\right) = 6x + 96y = 6(x + 16y)$$

Für $x = 2$, $y = 1$ ist $\left(\frac{d^2 z}{dx^2}\right)$ positiv und $z = 9$ ein Minimum.

Für $x = \frac{18}{7}$, $y = -\frac{9}{7}$ ist $\left(\frac{d^2 z}{dx^2}\right)$ negativ und $z = 14\frac{43}{49}$ ein Maximum.

186.

Nach der Infinitesimalmethode hat es auch Sinn, statt der Differential-Quotienten direct die abhängigen Differentiale zu eliminiren. Man hat z. B., wenn:

$$z = x^3 + y^3 \quad \cdots\cdots (1)$$

$$y = 9 - 4x \quad \cdots\cdots (2)$$

aus (1): $dz = 3x^2 dx + 3y^2 dy = 0$

oder: $x^2 dx + y^2 dy = 0 \quad \cdots\cdots (3)$

aus (2): $4dx + dy = 0 \quad \cdots\cdots (4)$

(4) mit y^2 multiplicirt und dann von (3) subtrahirt;

$$(x^2 - 4y^2) \cdot dx = 0$$

mithin, weil nach dieser Methode das Differential von x, nämlich dx, nicht absolut Null ist:

$$x^2 - 4y^2 = 0 \text{ etc., wie vorhin.}$$

187.

Aufgabe. Man sucht den Radius r und die Höhe h eines oben offenen graden Cylinders, welcher bei gegebenem Inhalt a die kleinste Oberfläche hat.

Auflösung. Es ist die Oberfläche:

$$F = 2r\pi h + r^2\pi \cdots\cdots\cdots\cdots (1)$$

$$\text{und } h = \frac{ar^{-2}}{\pi} \cdots\cdots\cdots\cdots (2)$$

Die Gleichung (2) ist hier die Bedingungsgleichung. Daher:

$$dF = 2\pi (h + r) dr + 2\pi r dh = 0$$

$$\text{oder:} \quad (h + r) dr + r \cdot dh = 0$$

$$\text{aus (2):} \quad \frac{2a \cdot r^{-3}}{\pi} dr + dh = 0$$

$$h + r - \frac{2ar^{-2}}{\pi} = 0$$

$$h - \frac{ar^{-2}}{\pi} = 0$$

$$h - r = 0$$

Es ist also $h = r = \sqrt[3]{\frac{a}{\pi}}$.

188.

Aufgabe. Aus vier gegebenen Seiten, a, b, c, e, ein Viereck zu construiren, welches den grössten Inhalt hat.

Auflösung. Heisst der gesuchte Winkel, den die Seiten a, b mit einander bilden, φ, und der dadurch bestimmte gegenüberliegende Winkel ψ, so ist der Inhalt:

$$F = \tfrac{1}{2}ab \sin\varphi + \tfrac{1}{2}ce \cdot \sin\psi \cdots\cdots\cdots (1)$$

Da nun aber die Winkel φ, ψ von einander abhängen, so müssen wir noch eine Bedingungsgleichung für sie suchen. Heisst die ihnen gegenüberliegende Diagonale k, so haben wir aus dem einen Dreieck $k^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\varphi$, und aus dem andern $k^2 = c^2 + e^2 - 2ce\cos\psi$. Daher:

$$a^2 + b^2 - 2ab\cos\varphi = c^2 + e^2 - 2ce\cos\psi \cdots\cdots (2)$$

Statt ψ zu eliminiren, was weitläufig sein würde, verfahren wir nach der gegebenen Regel und eliminiren $d\psi$.

$$dF = ab \cos\varphi \cdot d\varphi + ce \cdot \cos\psi \cdot d\psi = 0 \cdots\cdots (3)$$
$$ab \sin\varphi \; d\varphi - ce \cdot \sin\psi \cdot d\psi = 0 \cdots\cdots (4)$$

(3) mit $\sin\psi$ und (4) mit $\cos\psi$ multiplicirt und addirt, kommt:

$$ab(\cos\varphi \cdot \sin\psi + \sin\varphi \cdot \cos\psi) \cdot d\varphi = 0$$
$$\sin(\varphi + \psi) = 0$$
$$\varphi + \psi = 180^0$$

Das gesuchte Viereck ist also, als Maximum, ein Sehnenviereck. Von einem Minimum kann hier nicht die Rede sein.

Um die Winkel zu bestimmen, hat man jetzt aus (2), indem $\cos\psi = -\cos\varphi$ (weil $\psi = 180 - \varphi$):

$$\cos\varphi = \frac{a^2 - c^2 + b^2 - e^2}{2(ab + ce)}$$

189.

Nach diesen, zur Vorbereitung erst vorausgeschickten speciellen Fällen, wollen wir jetzt die etwas subtile Theorie der Maxima und Minima mit Nebenbedingungen im Allgemeinen betrachten.

Sei zuerst u eine Function von beliebig vielen unabhängig veränderlichen Grössen x, y, $z \cdots$, in Zeichen:

$$u = \varphi(x, y, z, t \cdots)$$

so ist bekanntlich für jedes Maximum oder Minimum dieser Function:

$$du = \left(\frac{du}{dx}\right) dx + \left(\frac{du}{dy}\right) dy + \left(\frac{du}{dz}\right) dz + \cdots = 0$$

Ferner ist bekannt, dass, um die allgemeine Bedingung $du = 0$ zu erfüllen, jeder Coefficient der Differentiale dx, dy, $\cdots$ für sich Null sein muss, $\left(\frac{du}{dx}\right) = 0$, $\left(\frac{du}{dy}\right) = 0$ etc.

Wir erhalten also eben so, viele Bedingungsgleichungen, als unabhängig veränderliche Grössen vorhanden sind. Hieraus können also die unbekannten, aber bestimmten Werthe derselben, welche sie in den Zuständen der Maxima und Minima haben müssen, abgeleitet werden.

Wären nun aber in:

$$u = \varphi(x, y, z, t \cdots) \cdots\cdots\cdots\cdots (1)$$

die Grössen x, y, $z \cdots$ nicht alle absolut veränderlich, sondern von einander abhängig, so müssen sich solche Abhängigkeiten durch Gesetze oder Functionen darstellen lassen. Wäre z. B. die Veränderung des y durch die des x bestimmt, $y = f(x)$, so könnten diese beiden von einander abhängig veränderlichen Grössen x, y nur für eine absolut veränderliche Grösse gelten und als solche in die Function (1) eintreten.

Wenn daher in der Function u, die zu einem Maximum oder Minimum gemacht werden soll, veränderliche Grössen so von einander abhängen, dass die eine aus der andern berechnet werden kann, so müssen wir erst, um die wirklich absolut veränderlichen Grössen zu erhalten, Substitutionen vornehmen, d. h. die abhängig veränderlichen Grössen durch diejenigen, von welchen sie abhängen, ausdrücken, was dann zuletzt auf einen Eliminationsprocess zurückkommt. Wäre z. B.:

$$u = \varphi(x, y, z, t) \text{ und ausserdem:}$$
$$y = \psi(x, z)$$
$$z = f(t)$$

gegeben, mit der Forderung u zu einem Maximum oder Minimum zu machen, so haben wir offenbar, statt vier absolut veränderliche Grössen, nur noch zwei, denn t kann z. B. durch z, und y wiederum durch x und z ausgedrückt werden und wir müssen diese Substitutionen in der Function u vornehmen, wenn die ausserdem gegebenen zwei Bedingungen mit erfüllt werden sollen.

Oftmals ist es nun aber nicht leicht, wenn nicht gar unmöglich, die abhängig veränderlichen Grössen zu eliminiren (wenn z. B. die Bedingungsgleichungen über den zweiten Grad gehen oder transcendent sind). Für diesen Fall theilte uns Gauss bei einer gewissen Veranlassung im Jahre 1829 folgendes leichte Verfahren mit:

190.

Es sei wieder:

$$u = \varphi(x, y, z, t, \cdots) \text{ und ausserdem:}$$
$$\psi(x, y, \cdots) = 0$$
$$f(y, t, \cdots) = 0$$
$$F(x, z, \cdots) = 0$$
$$\vdots$$

wo ψ, f, F, $\cdots$ die Bedingungsgleichungen ausdrücken:

Es ist auf den ersten Blick klar, dass wenigstens eine Bedingungsgleichung weniger als absolut veränderliche Grössen gegeben sein muss, denn wären grade so viele vorhanden, so würde jede der absolut veränderlichen Grössen aufhören, veränderlich zu sein; sie erhielten alle bestimmte Werthe und u selbst wäre mithin unveränderlich. Von einem Maximum oder Minimum könnte alsdann nicht die Rede sein.

Statt nun die abhängig veränderlichen Grössen zu eliminiren, wird es schon viel bequemer, wenn wir sämmtliche Gleichungen erst so differentiiren, als ob die Grössen alle absolut veränderlich wären:

$$du = \left(\frac{du}{dx}\right) dx + \left(\frac{du}{dy}\right) dy + \left(\frac{du}{dz}\right) dz + \cdots = 0$$

$$\left(\frac{d\psi}{dx}\right) dx + \left(\frac{d\psi}{dy}\right) dy + \left(\frac{d\psi}{dz}\right) dz + \cdots = 0 \text{ *)}$$

$$\left(\frac{df}{dx}\right) dx + \left(\frac{df}{dy}\right) dy + \left(\frac{df}{dz}\right) dz + \cdots = 0$$
$$\vdots$$

und nun erst die abhängigen Differentiale eliminiren.

Allein auch jetzt noch würde der Eliminationsprocess sehr beschwerlich werden und im Allgemeinen höchst complicirte Resultate geben. Durch folgenden Kunstgriff aber gelangt man auf eine eben so leichte als elegante Weise zu den Relationen, welche unter den veränderlichen Grössen für den Zustand eines Maximum oder Minimum Statt finden müssen.

Da das Differential einer jeden Bedingung Null ist, so ist es erlaubt, jedes noch mit einer neuen Unbekannten, $\lambda, \lambda' \cdots$ zu multipliciren, und dann alle zu der Fundamentalgleichung hinzu zu addiren, nämlich:

$$\left.\begin{matrix} \left(\frac{du}{dx}\right) \\ \lambda \left(\frac{d\psi}{dx}\right) \\ \lambda' \left(\frac{df}{dx}\right) \\ \vdots \end{matrix}\right\} dx + \left.\begin{matrix} \left(\frac{du}{dy}\right) \\ \lambda \left(\frac{d\psi}{dy}\right) \\ \lambda' \left(\frac{df}{dy}\right) \\ \vdots \end{matrix}\right\} dy + \left.\begin{matrix} \left(\frac{du}{dz}\right) \\ \lambda \left(\frac{d\psi}{dz}\right) \\ \lambda' \left(\frac{df}{dz}\right) \\ \vdots \end{matrix}\right\} dz + \cdots = 0$$

indem wir nun jeden Coefficienten der Differentiale $= 0$ setzen,

*) Die Differentiale derjenigen veränderlichen Grössen, welche in einer Bedingungsgleichung nicht vorkommen, stehen in der entsprechenden Differentialgleichung nur formell.

erhalten wir so viele Gleichungen, als veränderliche Grössen $x, y, z \cdots$ vorhanden sind, nämlich:

$$\left.\begin{array}{l} \left(\frac{du}{dx}\right)+\lambda\left(\frac{d\psi}{dx}\right)+\lambda'\left(\frac{df}{dx}\right)+\lambda''\left(\frac{dF}{dx}\right)+\cdots\cdots=0 \\ \left(\frac{du}{dy}\right)+\lambda\left(\frac{d\psi}{dy}\right)+\lambda'\left(\frac{df}{dy}\right)+\lambda''\left(\frac{dF}{dy}\right)+\cdots\cdots=0 \\ \left(\frac{du}{dz}\right)+\lambda\left(\frac{d\psi}{dz}\right)+\lambda'\left(\frac{df}{dz}\right)+\lambda''\left(\frac{dF}{dz}\right)+\cdots\cdots=0 \\ \vdots \end{array}\right\}\cdots\cdots(1)$$

Ausser diesen Gleichungen muss nun aber auch zu gleicher Zeit den Bedingungsgleichungen

$$\left.\begin{array}{l} \psi(x, y \cdots\cdots)=0 \\ f(y, t \cdots\cdots)=0 \\ F(x, z \cdots\cdots)=0 \\ \vdots \end{array}\right\}\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(2)$$

Genüge geleistet werden.

Aus der Combination der Gleichungen (1) und (2) ergeben sich dann die gesuchten Grössen. Man eliminirt zuerst die Grössen λ, $\lambda' \cdots\cdots$, deren absolute Werthe wir nicht zu kennen brauchen.*) Verbinden wir darauf die restirenden Gleichungen mit den Bedingungsgleichungen (2), so bestimmen sich auch die Werthe der veränderlichen Grössen $x, y, z, \cdots\cdots$, welche allen Forderungen entsprechen.

Wir sehen hieraus mit einem Blick auf die vorgelegte Frage:

$$\varphi(x, y, z, t, \cdots\cdots)=\left.\begin{array}{l}\text{max.}\\ \text{min.}\end{array}\right\}\text{ während}$$

$$\left.\begin{array}{l} \psi(x, y, \cdots\cdots) \\ f(y, t, \cdots\cdots) \\ F(x, z, \cdots\cdots) \end{array}\right\}\text{ constant } (=0)\text{ sind,}$$

---

*) Giebt es blos eine Bedingungsgleichung $\psi(x, y \ldots\ldots)=0$, so sind die Gleichungen, aus denen man λ eliminiren kann:

$$\begin{array}{l} \left(\frac{du}{dx}\right)+\lambda\left(\frac{d\psi}{dx}\right)=0; \\ \left(\frac{du}{dy}\right)+\lambda\left(\frac{d\psi}{dy}\right)=0; \\ \left(\frac{du}{dz}\right)+\lambda\left(\frac{d\psi}{dz}\right)=0; \end{array} \qquad -\lambda=\frac{\left(\frac{du}{dx}\right)}{\left(\frac{d\psi}{dx}\right)}=\frac{\left(\frac{du}{dy}\right)}{\left(\frac{d\psi}{dy}\right)}=\frac{\left(\frac{du}{dz}\right)}{\left(\frac{d\psi}{dz}\right)}=\cdots\cdots$$

dass es einerlei ist, ob wir für $\varphi(x, y, z, t, \cdots)$ das Maximum oder Minimum suchen, während wir $\psi(x, y, \cdots)$, $f(y, t \cdots)$ etc. als constant, oder als gegebene Bedingungen, die zugleich mit erfüllt werden sollen, betrachten, oder ob wir für irgend eine der Functionen $\psi(x, y, \cdots)$, $f(y, t \cdots)$ etc., das Maximum oder Minimum suchen und dagegen die übrigen als constant betrachten. In der That lassen sich alle Aufgaben dieser Art, wo die Maxima oder Minima einer Function mehrerer veränderlichen Grössen gesucht, dabei aber zugleich Nebenbedingungen erfüllt werden sollen, von zwei verschiedenen Seiten betrachten. (S. § 105, Amkg.)

Es ist nämlich ganz einerlei, welche Function wir als constant ansehen und für welche wir ein Maximum oder Minimum suchen wollen. Die Verhältnisse der unbekannten Grössen zu einander werden in beiden Fällen dieselben sein, und nur von der Wahl der Constanten, welche wir den Functionen gleich setzen, hängt es allein ab, ob wir in beiden Fällen identische Werthe erhalten sollen. Ein bekanntes Beispiel mag dies erläutern: Man soll die Höhe und Grundlinie des Cylinders angeben, der bei gegebenem Inhalte $= a$ die kleinste Oberfläche hat. Hier wird man dasselbe Verhältniss zwischen Höhe und Grundlinie finden, wenn man die Aufgabe so ausspricht: Man soll die Höhe und Grundlinie eines Cylinders finden, der bei gegebener Oberfläche, $= F$, den grössten Inhalt hat, und so bei allen Fragen dieser Art. (Vergl. Moigno's (Cauchy's) seizième leçon, aus welcher wir folgendes Beispiel nehmen.)

191.

Aufgabe. Man suche die Werthe von x, y, z, für welche

$$u = ax + by + cz \cdots\cdots\cdots\cdots (1)$$

ein Maximum wird, und für welche zugleich

$$x^2 + y^2 + z^2 - r^2 = 0 \cdots\cdots\cdots\cdots (2)$$

Auflösung. Man hat hier:

$$du = adx + bdy + cdz = 0$$
$$\lambda x dx + \lambda y dy + \lambda z dz = 0$$

$$\begin{array}{l} a + \lambda x = 0 \\ b + \lambda y = 0 \\ c + \lambda z = 0 \end{array} \qquad -\lambda = \frac{a}{x} = \frac{b}{y} = \frac{c}{z} \text{ (§ 190, Rdbkg.)}$$

$$\left.\begin{array}{ll}\text{Aus } \frac{a}{x} = \frac{b}{y} \text{ folgt: } & y = \frac{bx}{a} \\ \;\;\text{„}\;\; \frac{a}{x} = \frac{c}{z} \quad\;\; \text{„} & z = \frac{cx}{a}\end{array}\right\}\text{ Dies in (2) substituirt, kommt:}$$

$$x = \frac{ar}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$$

$$y = \frac{br}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$$

$$z = \frac{cr}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$$

$$u = r\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$$

192.

Aufgabe. Man verlangt die Werthe von x, y, z, für welche

$$u = x^2 + y^2 + z^2 \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (1)$$

ein Minimum und zugleich:

$$ax + by + cz = k \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (2)$$

Auflösung. Man hat hier:

$$du = xdx + ydy + zdz = 0$$
$$\lambda adx + \lambda bdy + \lambda cdz = 0$$

Hieraus folgt: $\frac{x}{a} = \frac{y}{b} = \frac{z}{c}$ und $y = \frac{bx}{a}$; $z = \frac{cx}{a}$.

$$x = \frac{ak}{a^2 + b^2 + c^2}$$

$$y = \frac{bk}{a^2 + b^2 + c^2}$$

$$z = \frac{ck}{a^2 + b^2 + c^2}$$

$$u = \frac{k^2}{a^2 + b^2 + c^2}$$



Zweiter Theil.

Integral-Rechnung.

„Die Analysis des Unendlichen ist deshalb von so grosser Anwendbarkeit in der Naturwissenschaft, weil in der Natur sich beständig der Character des Unendlichen offenbart." Leibnitz.

Einleitung.

193.

Die Integral-Rechnung ist in rein formeller Hinsicht grade das Umgekehrte der Differential-Rechnung. Denn abgesehen von den mancherlei Anwendungen der Differential-Rechnung, welche zusammen den eigentlichen materiellen Begriff derselben bilden, ist ihr nächster Zweck, von einer gegebenen Function einer veränderlichen Grösse das Differential dieser Function anzugeben. So ist z. B. von x^5 das Differential $= 5x^4dx$. In Zeichen: $d \cdot x^5 = 5x^4dx$.

Umgekehrt ist nun, nach dem ersten, rein formellen, vorläufig noch alle Anwendungen ausschliessenden Begriff der Integral-Rechnung, ihr nächster Zweck: zu einem gegebenen Differential einer veränderlichen Grösse die zugehörige ursprüngliche Function zu finden, welche dann das Integral des gegebenen Differentials heisst. So ist z. B. x^5 das Integral von $5x^4dx$.

Um anzudeuten, dass das Integral zu einem Differential gesucht werden soll, ist von Leibnitz das Zeichen $\int$ gewählt, welches man vor das gegebene Differential setzt. So ist z. B. $\int 5x^4dx = x^5$.

194.

Nach Leibnitzen's Anschauung bedeutet das Wort Integral so viel als Summe einer unendlichen Reihe unendlich kleiner Grössen und das Zeichen $\int$ das Summirungszeichen. Wir werden später bei der Anwendung der Integral-Rechnung zeigen, dass man in vielen Fällen das Integral eines Differentials wirklich als eine Summe betrachten kann. Vorläufig aber muss der Anfänger sich an den engen Begriff halten und unter Integral nichts anderes verstehen, als die zu einem gegebenen Differential gehörige Function, welche also differentiirt, das gegebene Differential wiedergiebt. Erst müssen wir wenigstens einige Differentiale integriren, d. h. ihre Integrale finden können, bevor wir Anwendungen machen, den Nutzen der Integral-Rechnung zeigen und so nach und nach zu ihrem erweiterten (materiellen) Begriff gelangen können.

Bemerken wollen wir noch, dass, obgleich wir jede Function zu differentiiren wissen, wir jedoch, strenge genommen, nicht auch umgekehrt jedes Differential integriren können, und in solchen Fällen uns immer mit einer Annäherung begnügen müssen, so wie, vergleichsweise, wir wohl jede Zahl potentiiren, nicht aber umgekehrt aus jeder Zahl eine Wurzel ziehen können, weil ja die meisten irrational sind.

195.

Zunächst merke man sich die, aus den in der Differential-Rechnung (§ 31) aufgestellten Differentialformeln sich von selbst ergebenden, sogenannten Integrationsformeln, die man im Gedächtniss behalten muss. Diese sind nämlich:

1. $\int x^m dx = \frac{x^{m+1}}{m+1}$

2. $\int e^x dx = e^x$

3. $\int a^x dx = \frac{a^x}{la}$

4. $\int \frac{dx}{x} = lx$

5. $\int \cos x dx = \sin x$

6. $\int \sin x dx = -\cos x$

7. $\int \frac{dx}{\cos^2 x} = \operatorname{tg} x$

8. $\int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\cot x$

9. $\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x$

10. $\int \frac{dx}{1+x^2} = \operatorname{arc} \operatorname{tg} x$

196.

Zu vorstehenden zehn Fundamentalformeln haben wir noch ein paar Bemerkungen zu machen.

1. Nach der ersten Formel muss man, um das Integral $\int x^m dx$ zu erhalten, zu dem Exponenten m eine Einheit addiren und dann die neue Potenz x^{m+1} durch den neuen Exponenten $m+1$ dividiren. So ist z. B.:

$$\int x^3 dx = \frac{x^4}{4}; \quad \int x^{\frac{1}{2}} dx = \frac{x^{\frac{1}{2}+1}}{\frac{1}{2}+1} = \tfrac{2}{3} x^{\frac{3}{2}}; \quad \int x^{-4} dx = -\tfrac{1}{3} x^{-3}$$

Diese Regel gilt (den einzigen Fall, wo $m = -1$ ist, ausgenommen) für alle, ganze oder gebrochene, positive oder negative, Exponenten. Der Fall, wo $m = -1$ ist, führt auf die vierte Fundamentalformel.

Es ist nämlich: $\int x^{-1} dx = \int \frac{dx}{x} = lx$. Die übrigen neun Formeln sind aber ganz allgemein gültig.

2. Es ist leicht einzusehen, weil es schon aus den Differentialformeln (§ 31) folgt, dass man einen constanten, unter dem Integrationszeichen stehenden Factor immer vor dasselbe setzen kann. So ist z. B.:

$$\int 4x^5 dx = 4 \cdot \int x^5 dx = 4 \cdot \frac{x^6}{6} = \tfrac{2}{3} x^6$$

$$\int ax^m dx = a \cdot \int x^m dx = \frac{a}{m+1} x^{m+1}$$

$$\int a \cos x dx = a \cdot \int \cos x dx = a \cdot \sin x$$

3. Da die Differentiale zweier Functionen, die sich nur um ein constantes Glied unterscheiden, vollkommen gleich sind (§ 14, 1), so ist klar, dass man jedem gefundenen Integral immer eine ganz beliebige constante Grösse, sowohl mit dem Plus- als Minus-Zeichen hinzufügen könnte. So ist z. B.:

$$\int e^x dx = e^x; \quad \text{aber auch} \quad \int e^x dx = e^x \pm c$$

weil sowohl die Function e^x, als auch $e^x \pm c$, differentiirt, das gegebene Differential wiedergiebt. Da wir aber erst bei den Anwendungen der Integral-Rechnung zeigen können, was für Umstände die Hinzufügung einer constanten Grösse, $\pm c$, zu

einem gefundenen Integral zuweilen erheischen, so wollen wir auch bis dahin, des kürzern Schreibens halber, diese, hier noch ganz überflüssige Constante stets weglassen.

197.

Nachdem wir nun die nöthigen Vorbegriffe über den nächsten, rein formellen Zweck der Integral-Rechnung vorausgeschickt haben, wollen wir nun zuerst die wichtigsten der verschiedenen Regeln mittheilen, welche man für die Integration der verschiedenen Differentiale aufgefunden hat. Dass es hier keine einzige allgemeine Integrationsregel giebt, die Verschiedenartigkeit der Functionen vielmehr verschiedene Regeln hervorruft, ist wohl vorauszusehen. Aus diesem Grunde muss auch, um Ordnung zu erhalten, die Integral-Rechnung in mehrere Abtheilungen zerfallen. Man wird übrigens bald bemerken, dass fast die ganze Integral-Rechnung aus lauter, mitunter sehr feinen Kunstgriffen besteht und nur Mathematiker ersten Ranges hier etwas leisten, sie erfinden und vervollkommnen konnten.

Vierzehntes Buch.

Die wichtigsten und am häufigsten Anwendung findenden Regeln der Integral-Rechnung.

I. Unmittelbare Integration.

198.

Alle Integrationen, wenn sie möglich sind, müssen im Grunde immer auf eine der § 195 aufgestellten Fundamentalformeln zurückgeführt werden. Bevor jedoch dies geschehen kann, müssen mit den zu integrirenden Differentialen oftmals erst Umformungen vorgenommen, oder auch neue veränderliche Grössen substituirt werden.

Eine Hauptregel ist immer, jedesmal erst genau zuzusehen, ob man ein verlangtes Integral nicht unmittelbar erkennen, oder doch durch eine einfache Substitution auf eine der Fundamentalformeln zurückführen kann. So sieht man z. B. leicht, dass: $\int \frac{dx}{1+x} = l(1+x)$ oder, wenn man eine Substitution zu Hülfe nehmen will und $1+x=u$, mithin $dx=du$ setzt, dass:

$$\int \frac{dx}{1+x} = \int \frac{du}{u} = lu = l(1+x).$$ Ebenso ist:

$$\int \frac{dx}{1+a^2x^2} = \frac{1}{a}\int \frac{du}{1+u^2} = \frac{1}{a}\operatorname{arc\,tg} u = \frac{1}{a}\operatorname{arc\,tg} ax$$

Hier wurde $ax=u$, mithin $dx=\frac{1}{a}\cdot du$ gesetzt.

199.

Nach einiger Uebung werden solche einfache Substitutionen überflüssig. Man merke sich bei solchen unmittelbaren Integrationen noch folgende specielle Fälle.

1. Ist, abgesehen von einem constanten Factor oder Divisor, der Zähler eines Bruches das Differential vom Nenner, so ist das Integral immer gleich dem natürlichen Logarithmus vom Nenner. So ist z. B.:

$\int \frac{mxdx}{a+bx^2} = \frac{m}{2b} l(a+bx^2)$, oder wenn man $a+bx^2 = u$, also $2bxdx = du$, mithin $xdx = \frac{du}{2b}$ setzt:

$$\int \frac{mxdx}{a+bx^2} = \frac{m}{2b}\int \frac{du}{u} = \frac{m}{2b} lu = \frac{m}{2b} l(a+bx^2).$$

2. Besteht das Differential aus zwei Factoren, wovon der eine eine Potenz mit positiven oder negativen Exponenten, und der andere (von einem constanten Factor abgesehen) das Differential von der Wurzel ist, so ist das Integral gleich der um eine Einheit höhern Potenz. So ist z. B.:

$$\int \frac{x^2\,dx}{(1-x^3)^2} = \int (1-x^3)^{-2} x^2 dx = \tfrac{1}{3}(1-x^3)^{-1} = \frac{1}{3(1-x^3)}$$

oder auch, indem man $1-x^3 = u$, mithin $-3x^2dx = du$ und $x^2dx = -\frac{1}{3}du$ setzt:

$$\int \frac{x^2\,dx}{(1-x^3)^2} = -\tfrac{1}{3}\int u^{-2}du = -\tfrac{1}{3}\cdot\frac{u^{-2+1}}{-2+1} = \tfrac{1}{3}(1-x^3)^{-1}$$

$$\int \frac{xdx}{\sqrt{1-x^2}} = \int (1-x^2)^{-\frac{1}{2}} xdx = -(1-x^2)^{\frac{1}{2}}.$$

3. Besteht ein zu integrirendes Differential aus mehren durch + oder − verbundenen Gliedern, so muss man natürlich jedes einzelne Glied integriren (§ 31, 6). Wäre z. B.:

$$y = 2x^6 + e^x - \sin x, \quad \text{so ist:}$$
$$dy = 12x^5dx + e^x dx - \cos x dx,$$

und also umgekehrt:

$$\int dy = \int (12x^5 + e^x - \cos x)dx$$
$$y = \int 12x^5 dx + \int e^x dx - \int \cos x dx$$
$$y = 2x^6 + e^x - \sin x.$$

$$\int \frac{1+x}{\sqrt{1-x^2}} \cdot dx = \int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} + \int \frac{xdx}{\sqrt{1-x^2}} = \operatorname{arc} \sin x - \sqrt{1-x^2}$$

$$\int \frac{dx}{\sin^2 x \cos^2 x} = \int \frac{(\sin^2 x + \cos^2 x)}{\sin^2 x \cdot \cos^2 x} dx = \int \left(\frac{1}{\cos^2 x} + \frac{1}{\sin^2 x} \right) dx = \operatorname{tg} x - \cot x$$

200.

Aufgabe. Man suche folgende Differentiale, ohne Substitution, unmittelbar zu integriren.

1. $\frac{dx}{x-a}$
2. $\frac{dx}{(x-a)^m}$
3. $\frac{dx}{a^2+x^2}$
4. $e^{ax} dx$
5. $e^{-ax} dx$
6. $\cos ax dx$
7. $\frac{adx}{\sqrt{a^2-x^2}}$
8. $\frac{axdx}{\sqrt{a^2-x^2}}$
9. $lx \cdot \frac{dx}{x}$
10. $\frac{xdx}{\sqrt{a^2+x^2}}$
11. $(a+bx)^2 dx$
12. $(a+bx+cx^2)^{\frac{5}{3}} \cdot (b+2cx)dx$

Auflösung. Man findet leicht, dass:

1. $\int \frac{dx}{x-a} = l(x-a)$
2. $\int \frac{dx}{(x-a)^m} = \frac{(x-a)^{-m+1}}{-m+1}$
3. $\int \frac{dx}{a^2+x^2} = \frac{1}{a} \operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{x}{a}$
4. $\int e^{ax} dx = \frac{1}{a} e^{ax}$
5. $\int e^{-ax} dx = -\frac{1}{a} e^{-ax}$
6. $\int \cos axdx = \frac{1}{a} \sin ax$
7. $\int \frac{adx}{\sqrt{a^2-x^2}} = a \operatorname{arc} \sin \frac{x}{a}$
8. $a \int (a^2-x^2)^{-\frac{1}{2}} xdx = -a(a^2-x^2)^{\frac{1}{2}}$
9. $\int (lx) \cdot \frac{dx}{x} = \frac{1}{2}(lx)^2$ (§ 199, 2)

10. $$\int (a^2 + x^2)^{-\frac{1}{2}} x dx = \sqrt{a^2 + x^2}$$

11. $$\int (a + bx)^2 \cdot dx = \frac{(a + bx)^3}{3b}$$

12. $$\int (a + bx + cx^2)^{\frac{2}{3}} (b + 2cx)\, dx = \tfrac{3}{5}(a + bx + cx^2)^{\frac{5}{3}}$$

Das Integral No. 11 findet man auch so:

$$\int (a + bx)^2 dx = \int (a^2 + 2abx + b^2x^2)\, dx = a^2x + abx^2 + \tfrac{1}{3}b^2x^3$$

Dies Integral ist von dem in 11 angeführten nur in der Constante $\frac{a^3}{3b}$ verschieden.

II. Theilweise Integration.

201.

Ein sehr fruchtbarer Kunstgriff, um Integrale zu finden, besteht in der sogenannten **theilweisen Integration**. Um zu zeigen, was man hierunter zu verstehen hat, seien $F(x)$ und $f(x)$ zwei beliebige Functionen von x. Differentiirt man das Product derselben, so hat man (§ 31, 7):

$$d \cdot [F(x) \cdot f(x)] = f(x) \cdot F'(x) dx + F(x) \cdot f'(x) dx \text{ *)}$$

und, wenn man beiderseits wieder integrirt und beachtet, dass die Zeichen $\int$ und d sich aufheben, so folgt aus obiger Gleichung (§ 199, 3):

$$F(x) \cdot f(x) = \int f(x) \cdot F'(x) dx + \int F(x) \cdot f'(x) dx$$

und hieraus, durch Umsetzung der Glieder:

$$\int F(x) \cdot f'(x) dx = F(x) \cdot f(x) - \int f(x) \cdot F'(x) dx$$

in Worten: Kann man ein zu integrirendes Differential $F(x) f'(x) dx$, in zwei solcher Factoren $F(x) \cdot f'(x) dx$ zerlegen, von welchen der eine $f'(x) dx$ integrabel ist, so ist, wie vorstehende Gleichung lehrt, das Integral von $F(x) \cdot f'(x) dx$ gleich dem ersten Factor

---

*) Bezeichnet man die eine Function von x Kürze halber mit u, die andere mit v, so hat man, leichter zu überblicken:

$$d(u \cdot v) = v \cdot du + u \cdot dv$$
$$uv = \int v \cdot du + \int u \cdot dv$$
$$\int u \cdot dv = u \cdot v - \int v \cdot du$$

$F(x)$ multiplicirt mit dem Integral des zweiten $\int f'(x)dx = f(x)$, weniger dem Integral aus dem gefundenen Integral, $f(x)$, multiplicirt mit dem Differential vom ersten Factor $d \cdot F(x) = F'(x)dx$. Lässt sich nun dieses neue Integral $\int f(x) \cdot F'(x)dx$ finden, wie es oft der Fall ist, so hat man offenbar auch das eigentlich verlangte Integral, und dies ist es, was man unter theilweiser Integration versteht. So ist z. B.:

$$\int xe^x dx = \int x \cdot e^x dx = x \cdot e^x - \int e^x \cdot dx = xe^x - e^x$$

Es ist mithin $\int xe^x dx = e^x(x-1)$. Hier war nach der kurzen in der Note angegebenen Formel $u = x$ und $dv = e^x dx$. Ebenso findet man: $\int \cos x \cdot x dx = x \cdot \sin x + \cos x$. Es ist nämlich:

$$\int \cos x \cdot x dx = \int x \cdot \cos x dx = x \cdot \sin x - \int \sin x \cdot dx = x \sin x + \cos x$$

Hier war $u = x$ und $dv = \cos x dx$.

202.

Es kann vorkommen, dass man die theilweise Integration mehrmals wiederholen muss. So ist z. B.:

$$\int x^2 \cdot \cos x dx = x^2 \cdot \sin x - \int \sin x \cdot 2x dx, \text{ oder:}$$
$$\int x^2 \cdot \cos x dx = x^2 \cdot \sin x - 2\int x \cdot \sin x dx \cdots\cdots (1)$$

Wiederholt man die theilweise Integration mit dem zweiten Gliede rechter Hand der Gleichung (1), so hat man:

$$\int x \cdot \sin x dx = x \cdot (-\cos x) + \int \cos x dx \cdots\cdots (2)$$
$$\int \cos x dx = \sin x \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (3)$$

Aus diesen drei Gleichungen hat man leicht folgende drei geordnet unter einander, was gleich hätte geschehen können, nämlich:

$$\int x^2 \cos x dx = x^2 \sin x - 2\int x \sin x dx$$
$$-2 \cdot \int x \sin x dx = 2x \cos x - 2\int \cos x dx$$
$$-2 \cdot \int \cos x dx = -2 \sin x$$

Aus der Addition dieser drei Gleichungen folgt:

$$\int x^2 \cos x dx = x^2 \sin x + 2x \cos x - 2 \sin x$$

203.

Aufgabe. Man versuche folgende Differentiale durch theilweise Integration zu integriren:

1. $lx \cdot dx$; 2. $\frac{lx}{x} dx$; 3. $\operatorname{arc\,tg} x dx$;

4. $\arcsin x dx$; 5. $\arccos x dx$; 6. $x^m lx dx$.

Auflösung. Man findet hier:

$$1. \quad \int lx dx = lx \cdot x - \int x \frac{dx}{x} = x(lx - 1)$$

$$2. \quad \int lx \cdot \frac{dx}{x} = lx \cdot lx - \int lx \cdot \frac{dx}{x}$$

und wenn man das Integral rechter Hand mit dem gleichnamigen linker Hand vereinigt:

$$2 \int lx \cdot \frac{dx}{x} = (lx)^2, \text{ also:}$$

$$\int lx \cdot \frac{dx}{x} = \tfrac{1}{2}(lx)^2$$

$$3. \quad \int \operatorname{arc\,tg} x dx = \operatorname{arc\,tg} x \cdot x - \int \frac{x dx}{1+x^2}$$

$$\int \operatorname{arc\,tg} x dx = x \operatorname{arc\,tg} x - \tfrac{1}{2} l(1+x^2)$$

$$4. \quad \int \arcsin x dx = \arcsin x \cdot x - \int \frac{x dx}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$\int \arcsin x dx = x \cdot \arcsin x + (1-x^2)^{\frac{1}{2}}$$

$$5. \quad \int \arccos x dx = x \arccos x - \sqrt{1-x^2}$$

$$6. \quad \int lx \cdot x^m dx = lx \cdot \frac{x^{m+1}}{m+1} - \frac{1}{m+1} \int x^m dx$$

$$\int lx \cdot x^m dx = \frac{x^{m+1} lx}{m+1} - \frac{x^{m+1}}{(m+1)^2}$$

III. Integration rational gebrochener Functionen.

204.

Bei den gebrochenen rationalen Functionen können wir immer annehmen, 1. dass Zähler und Nenner keinen gemeinschaftlichen Factor haben, weil man diese gegen einander aufheben kann; 2. dass die gebrochene Function eine echt gebrochene ist, weil man sonst, durch Division mit dem Nenner in den Zähler, die ganze Function erst herausziehen kann. Die Aufgabe kommt also

darauf zurück, eine echt gebrochene Function $\frac{f(x)}{F(x)} \cdot dx$ zu integriren. Dieses ist aber (im Allgemeinen) nur dann möglich, wenn sich die gebrochene Function in Partialbrüche zerlegen lässt, deren Nenner Formen ersten oder zweiten Grades, oder auch Potenzen davon sind, und deren Zähler constant oder Formen ersten Grades sind. Die Regeln, eine gebrochene Function, wenn möglich, in die erwähnten Partialbrüche zu zerlegen, sind in der Analysis § 140 erklärt, und müssen hier als bekannt vorausgesetzt werden.

205.

Ist die Zerlegung der gebrochenen Function $\frac{f(x)}{F(x)}$ in Partialbrüche möglich, so hat man nur eine Reihe von Brüchen zu integriren und die Summe dieser Integrale ist dann das Gesuchte. Den einzigen Bruch ausgenommen, welcher eine Potenz von x^2+px+q zum Nenner hat, und besonders betrachtet werden muss, findet man die Integrale der übrigen unmittelbar nach den Fundamentalformeln (1) und (4) (§ 195).

206.

Aufgabe. Man suche folgende angedeutete Integrale:

1. $\int \frac{7x+24}{x^2+3x-18} \cdot dx$; 2. $\int \frac{24}{x^2+3x-18} \cdot dx$; 3. $\int \frac{dx}{a^2-x^2}$

4. $\int \frac{x^3+8x^2+4x-66}{x^2+3x-18} \cdot dx$; 5. $\int \frac{x^3-6x^2+15x-2}{(x-2)^3\,(x+2)} dx$

Auflösung. Man hat hier (Analysis § 141, etc.):

1. $$\int \frac{(7x+24)dx}{x^2+3x-18} = \int \left(\frac{5dx}{x-3} + \frac{2dx}{x+6}\right) = 5\,l(x-3) + 2\,l(x+6)$$

2. $$\int \frac{24dx}{x^2+3x-18} = \int \left(\tfrac{8}{3} \cdot \frac{dx}{x-3} - \tfrac{8}{3} \cdot \frac{dx}{x+6}\right)$$

$$= \tfrac{8}{3}\Big(l(x-3) - l(x+6)\Big)$$

$$= \tfrac{8}{3}\, l\frac{x-3}{x+6} = l\left(\frac{x-3}{x+6}\right)^{\frac{8}{3}}$$

3. $$\int\frac{dx}{a^2-x^2}=\frac{1}{2a}\int\left(\frac{dx}{a+x}+\frac{dx}{a-x}\right)=\frac{1}{2a}\Big(l(a+x)-l(a-x)\Big)$$
$$=\frac{1}{2a}l\left(\frac{a+x}{a-x}\right)=-\frac{1}{2a}l\frac{a-x}{a+x}$$

4. $$\int\frac{x^3+8x^2+4x-66}{x^2+3x-18}\cdot dx=\int\left(x+5+\frac{7x+24}{x^2+3x-18}\right)dx$$ (Anal. § 141)
$$=\tfrac{1}{2}x^2+5x+2l(x+6)+5l(x-3)$$

5. $$\int\frac{x^3-6x^2+15x-2}{(x-2)^3(x+2)}\cdot dx=\int\left(\frac{dx}{x+2}+\frac{3dx}{(x-2)^3}\right)=l(x+2)-\tfrac{3}{2}(x-2)^{-2}$$

Mehr hierüber s. § 327.

IV. Integration der irrationalen Functionen.

207.

Im Verhältniss zur Anzahl aller irrationalen Functionen giebt es nur sehr wenige, wo die Integration derselben direct möglich ist. Unter diesen wenigen sind die beiden:

$$\frac{dx}{\sqrt{a+bx+cx^2}} \text{ und } \frac{dx}{\sqrt{a+bx-cx^2}}$$

die wichtigsten, wo nämlich sowohl der Potenz-, als auch der Wurzelexponent die Zahl 2 nicht überschreitet, und diese beiden werden wir hier nur integriren.

1. Um die erste Function zu integriren, ist es am besten, die Wurzelgrösse durch Einführung einer neuen veränderlichen Grösse erst rational zu machen. Man setze zu dem Ende:

$$\sqrt{a+bx+cx^2}=u-x\sqrt{c}, \text{ so hat man:}$$
$$a+bx+cx^2=u^2-2ux\sqrt{c}+cx^2, \text{ hieraus (durch Different.):}$$
$$bdx=2udu-2x\sqrt{c}\cdot du-2u\sqrt{c}\cdot dx$$
$$(b+2u\sqrt{c})dx=2(u-x\sqrt{c})du$$

$$\frac{dx}{u-x\sqrt{c}}=\frac{2du}{b+2u\sqrt{c}},$$ für $u-x\sqrt{c}$ seinen Werth substituirt:

$$\frac{dx}{\sqrt{a+bx+cx^2}}=\frac{du}{\tfrac{1}{2}b+u\sqrt{c}}$$
$$\int\frac{dx}{\sqrt{a+bx+cx^2}}=\int\frac{du}{\tfrac{1}{2}b+u\sqrt{c}}=\frac{1}{\sqrt{c}}\cdot l(u\sqrt{c}+\tfrac{1}{2}b)$$

oder für u seinen Werth gesetzt:

$$(1)\quad \int \frac{dx}{\sqrt{a+bx+cx^2}} = \frac{1}{\sqrt{c}} \cdot l\left(\tfrac{1}{2}b + cx + \sqrt{c} \cdot \sqrt{a+bx+cx^2}\right)$$

2. Das Integral der andern Function könnte man ebenfalls durch Rationalmachen derselben finden. Man thut aber jetzt besser, das Trinom in ein Binom zu verwandeln. Man setze deshalb:

$$a+bx-cx^2 = a + \frac{b^2}{4c} - \left(x\sqrt{c} - \frac{b}{2\sqrt{c}}\right)^2$$

setzt man noch $a + \frac{b^2}{4c} = m^2$ und $x\sqrt{c} - \frac{b}{2\sqrt{c}} = u$, mithin:

$dx = \frac{1}{\sqrt{c}} \cdot du$, so hat man:

$$\int \frac{dx}{\sqrt{a+bx-cx^2}} = \frac{1}{\sqrt{c}} \int \frac{du}{\sqrt{m^2-u^2}} = \frac{1}{\sqrt{c}} \text{arc sin} \frac{u}{m}$$

und für u und m ihre Werthe gesetzt:

$$(2)\quad \int \frac{dx}{\sqrt{a+bx-cx^2}} = \frac{1}{\sqrt{c}} \text{arc sin} \frac{2cx-b}{\sqrt{4ac+b^2}}$$

Nach diesen beiden Formeln (1) und (2) hat man z. B.:

$$\int \frac{dx}{\sqrt{a^2+x^2}} = l\left(x+\sqrt{a^2+x^2}\right); \qquad \int \frac{dx}{\sqrt{x^2-1}} = l\left(x+\sqrt{x^2-1}\right);$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{ax-x^2}} = \text{arc sin} \frac{2x-a}{a} = \text{arc cos} \frac{a-2x}{a}$$

Wäre in beiden Formeln $c = 0$, so hat man unmittelbar nach der Fundamentalformel:

$$\int \frac{dx}{\sqrt{a+bx}} = \int (a+bx)^{-\frac{1}{2}}\, dx = \frac{2}{b}(a+bx)^{\frac{1}{2}}$$

Ergänzungen s. § 334.

V. Integration der Exponential- und logarithmischen Functionen.

208.

Nur in wenigen Fällen gelingt die Integration solcher Functionen durch Substitution oder durch theilweise Integration. Man hat z. B.:

1. $$\int x^n lx dx = \int lx \cdot x^n dx = lx \cdot \frac{x^{n+1}}{n+1} - \frac{1}{n+1}\int x^{n+1}\frac{dx}{x}$$

$$\int x^n lx dx = \frac{x^{n+1}}{n+1}\left(lx - \frac{1}{n+1}\right)$$

2. $$\int \frac{lx}{x} dx = \int lx \cdot \frac{dx}{x} = \int u \cdot du$$

$$\int \frac{lx}{x} dx = \tfrac{1}{2}u^2 = \tfrac{1}{2}(lx)^2$$

3. $$\int x^2 e^x dx = e^x(x^2 - 2x + 2).$$ (§ 202.)

VI. Integration der goniometrischen Functionen.

209.

Hier muss man sich zuerst folgende sechs Integrale merken, auf welche alle übrigen Kreisfunctionen, wenn ihre Integration überhaupt möglich ist, zurückgeführt werden müssen. Man hat zunächst:

1. $$\int \sin x \cos x dx = \tfrac{1}{2}\sin^2 x$$

2. $$\int \frac{\cos x}{\sin x} dx = l \sin x$$

3. $$\int \frac{\sin x}{\cos x} dx = -l \cos x$$

Diese drei Integrale erräth man leicht. Will man sie aber durch einen kleinen Kunstgriff finden, so setze man in (1) und (2) $\sin x = u$, mithin $\cos x dx = du$, so ist:

$$\int \sin x \cdot \cos x dx = \int u du = \tfrac{1}{2}u^2 = \tfrac{1}{2}\sin^2 x$$

$$\int \frac{1}{\sin x} \cdot \cos x dx = \int \frac{1}{u} \cdot du = lu = l \sin x$$

$$\int \frac{1}{\cos x} \cdot \sin x dx = -\int \frac{1}{u} \cdot du = -lu = -l \cos x$$

Mehr Schwierigkeiten machen die folgenden drei Integrationen:

4. $$\int\frac{dx}{\sin x\cdot\cos x}=\int\frac{\sin^2 x+\cos^2 x}{\sin x\cdot\cos x}\cdot dx=\int\left(\frac{\sin x}{\cos x}+\frac{\cos x}{\sin x}\right)dx$$

$$\int\frac{dx}{\sin x\cdot\cos x}=-l\cos x+l\sin x=l\frac{\sin x}{\cos x}=l\operatorname{tg}x$$

5. $$\int\frac{dx}{\sin x}=\int\frac{dx}{2\sin\frac{1}{2}x\cdot\cos\frac{1}{2}x},\text{ setze }\tfrac{1}{2}x=\varphi,\text{ mithin }dx=2d\varphi$$

$$\int\frac{dx}{\sin x}=\int\frac{d\varphi}{\sin\varphi\cdot\cos\varphi}=l\operatorname{tg}\varphi=l\operatorname{tg}\tfrac{1}{2}x$$

6. $$\int\frac{dx}{\cos x}=\int\frac{dx}{\sin(\frac{\pi}{2}-x)}=-l\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}-\tfrac{1}{2}x\right)=l\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}+\tfrac{1}{2}x\right)$$

210.

Die Integrale der manchmal vorkommenden Functionen $\sin^m x dx$, $\cos^m x dx$, findet man, wenn m eine ganze Zahl ist, am leichtesten, indem man die Potenzen von $\sin x$ und $\cos x$ erst durch dieselben trigonometrischen Functionen von Vielfachen des Bogens x ausdrückt. So hat man z. B. (Analysis § 97a):

$$\int\cos^2 x dx=\tfrac{1}{2}\int(\cos 2x+1)\,dx=\tfrac{1}{4}\sin 2x+\tfrac{1}{2}x$$

$$\int\cos^3 x dx=\tfrac{1}{4}\int(\cos 3x+3\cos x)\,dx=\tfrac{1}{12}\sin 3x+\tfrac{3}{4}\sin x$$

Ebenso findet man:

$$\int\sin^4 x\cdot dx=\tfrac{1}{8}\int(\cos 4x-4\cos 2x+3)\cdot dx$$

$$\int\sin^4 x\cdot dx=\tfrac{1}{32}\sin 4x-\tfrac{1}{4}\sin 2x+\tfrac{3}{8}x$$

Eine andere Methode s. § 339.

211.

Mit vorstehenden wenigen Integrationsregeln lässt sich schon viel anfangen und wir wollen deshalb auch, um den eigentlichen Zweck und Nutzen der Integral-Rechnung zu zeigen, mit diesen nöthigen Vorkenntnissen ausgerüstet, jetzt erst zu den mannigfaltigen Anwendungen übergehen. Diese müssen sich jedoch hier noch auf reine Geometrie beschränken, weil wir keine andere Wissenschaften, wie Mechanik, Physik etc. als bekannt voraussetzen dürfen. Wer jedoch die Anwendungen der Integral-Rechnung auf Geometrie gut versteht, der wird auch leicht ihre Anwendungen auf andere geeignete Wissenschaften verstehen.

Fünfzehntes Buch.

Quadratur ebener Flächen.

212.

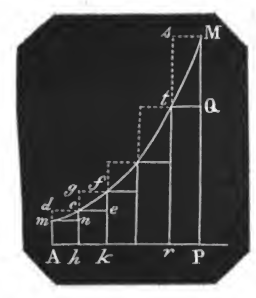
In der Analysis ist bemerkt, dass Leibnitz durch die Betrachtung der Zahlenreihen auf die Erfindung der Integral-Rechnung gekommen, und (§ 194) dass er ein Integral als Summe unendlich kleiner Grössen und das Zeichen $\int$ als Summationszeichen betrachtet. Um nun diese für die meisten ernsthaften Anwendungen der Integral-Rechnung höchst wichtige, für den ersten Anfänger aber etwas subtile Ansicht zum Verständniss zu bringen, möge erst Folgendes zur Vorbereitung dienen und die Ueberzeugung verschaffen, dass man die Flächen krummlinigt begrenzter Figuren nicht nur näherungsweise, sondern oftmals ganz genau bestimmen kann.

213.

Denkt man sich die krumme Linie gezeichnet, deren Gleichung

$$y = ax^2 + b$$

ist, so kann man nach der Grösse der Fläche fragen, welche von einem Stück, mM, der krummen Linie, von den beiden Ordinaten mA, MP und dem Stück AP der Abscissenlinie begrenzt wird.



Sei A der Anfangspunct der Coordinaten und $AP = x$, so ist durch diese gegebene Abscisse und durch die Gleichung der krummen Linie die Grösse der fraglichen Fläche z gewiss bestimmt. Bevor wir jedoch zeigen, wie man sie durch Integral-Rechnung leicht findet, wollen wir erst folgende Methode anwenden.

Man denke sich die vom Anfangspunct abgemessene Abscisse $AP = x$ in n gleiche Theile getheilt, so dass $Ah = hk = \cdots\cdot = \frac{x}{n}$ ist, so giebt die gegebene Gleichung der krummen Linie, $y = ax^2 + b$, wenn man statt x nach und nach $\frac{1}{n}x = Ah$, $\frac{2}{n}x = Ak$, $\cdots \frac{n}{n}x = AP$ setzt, die Ordinaten:

$$ch = a\left(\frac{1}{n}x\right)^2 + b;\ fk = a\left(\frac{2}{n}x\right)^2 + b; \cdots MP = a\left(\frac{n}{n}x\right)^2 + b.$$

Multiplicirt man die Ordinate ch mit $Ah = \frac{x}{n}$, so erhält man das Rechteck $hcdA = \left[a\left(\frac{1}{n}x\right)^2 + b\right] \cdot \frac{x}{n}$; ebenso giebt fk mit $hk = \frac{x}{n}$ multiplicirt, das Rechteck $kfgh = \left[a\left(\frac{2}{n}x\right)^2 + b\right] \cdot \frac{x}{n}$ etc. Das letzte Rechteck $PMsr$ ist $= \left[a\left(\frac{n}{n}x\right)^2 + b\right] \cdot \frac{x}{n}$.

Die Summe aller dieser äussern Rechtecke ist gewiss grösser, als die fragliche Fläche z, in Zeichen:

$$z < \left[a\left(\frac{1x}{n}\right)^2 + b\right] \cdot \frac{x}{n} + \left[a\left(\frac{2x}{n}\right)^2 + b\right] \frac{x}{n} + \left[a\left(\frac{3x}{n}\right)^2 + b\right] \cdot \frac{x}{n} + \ldots + \left[a\left(\frac{nx}{n}\right)^2 + b\right] \cdot \frac{x}{n}$$

$$z < \frac{x}{n}\left[a\frac{x^2}{n^2}\left(1 + 4 + 9 + 16 + \cdots\cdot + n^2\right) + nb\right]$$

$$z < a\frac{x^3}{n^3}\left(1 + 4 + 9 + 16 + \cdots\cdot + n^2\right) + \frac{nbx}{n}$$

Nun ist aber die Summe der n ersten Quadratzahlen (Anal. § 51)

$$= \frac{n \cdot n+1 \cdot 2n+1}{1 \cdot 2 \cdot 3} = \frac{n^3}{3} + \frac{n^2}{2} + \frac{n}{6}, \text{ mithin:}$$

$$z < a\frac{x^3}{n^3}\left(\frac{n^3}{3} + \frac{n^2}{2} + \frac{n}{6}\right) + bx$$

$$z < ax^3\left(\tfrac{1}{3} + \frac{1}{2n} + \frac{1}{6n^2}\right) + bx \cdots\cdots\cdot (1)$$

Multiplicirt man dagegen mit $\frac{x}{n}$ die erste, zweite .... vorletzte Ordinate, so erhält man die kleinern innern Rechtecke:

$$Amnh = \left[a\left(\frac{0}{n}x\right)^2 + b\right]\frac{x}{n};\ hkec = \left[a\left(\frac{1}{n}x\right)^2 + b\right].\frac{x}{n};.\ rPQt = \left[a\left(\frac{n-1}{n}x\right)^2 + b\right]\frac{x}{n},$$

deren Summe gewiss kleiner, als die fragliche Fläche z ist, in Zeichen:

$$z > a\frac{x^3}{n^3}\left(1 + 4 + 9 + 16 + \cdots + (n-1)^2\right) + bx$$

Die Summe der $n-1$ ersten Quadratzahlen ist nun aber $= \frac{(n-1)\,n \cdot (2n-1)}{1 \cdot 2 \cdot 3} = \frac{n^3}{3} - \frac{n^2}{2} + \frac{n}{6}$, mithin ist:

$$z > ax^3\left(\tfrac{1}{3} - \frac{1}{2n} + \frac{1}{6n^2}\right) + bx \cdots\cdots\cdots\cdots (2)$$

Die zu findende Fläche z liegt also zwischen den beiden Ausdrücken (1) und (2). Die Grösse eines jeden hängt von der Zahl n ab. Je grösser man n nimmt, d. h in je mehr gleiche Theile man die Abscisse AP $= x$ theilt, je schmäler werden die in (1) und (2) summirten Rechtecke. So lange jedoch n als eine bestimmte, wenn auch noch so grosse Zahl gedacht wird, so lange werden beide Ausdrücke (1) und (2) von der gesuchten Grösse z etwas, wenn auch noch so wenig abweichen. Lässt man aber n immerfort wachsen, so werden beide fragliche Summen, wovon die eine zu gross, die andere zu klein ist, sich einer und derselben festen Grenze immerfort nähern und sie für $n = \infty$ wirklich erreichen. Beide Ausdrücke (1) und (2) geben also, indem man $n = \infty$ setzt und beachtet, dass dann $\pm \frac{1}{2n}$ und also

auch $\frac{1}{6n^2}$ Infinitesimalgrössen werden und gegen die endliche Grösse $\frac{1}{3}$ verschwinden, in völliger Strenge die gesuchte Fläche:

$$z = a \cdot \frac{x^3}{3} + bx$$

Wäre z. B. $a = \frac{1}{10}$; $b = 2$, mithin $y = \frac{1}{10}x^2 + 2$ und also $z = \frac{1}{10} \cdot \frac{x^3}{3} + 2x$, so wäre z. B. für $x = 10'$, $z = 53\frac{1}{3}\square'$.

214.

Nach der gefundenen Formel:

$$z = \frac{1}{10} \cdot \frac{x^3}{3} + 2x$$

kann man also sich von A an beliebig weit nach der positiven Seite der x erstreckenden Flächenstücke berechnen. Soll aber die zu berechnende Fläche nicht bei A, sondern bei k anfangen, so muss man von dem für z erhaltenen Ausdruck die Fläche, welche derselbe für $x = Ak$ giebt, subtrahiren oder als eine Constante mit dem Minus-Zeichen hinzufügen. Wäre z. B. $Ak = 4$, so wäre die Fläche $Akfm = \frac{1}{10} \cdot \frac{4^3}{3} + 2 \cdot 4 = 10\frac{2}{15}$, mithin:

$$z = \frac{1}{10} \cdot \frac{x^3}{3} + 2x - 10\frac{2}{15}$$

Setzt man jetzt für x beliebige Werthe, so erhält man jedesmal eine von $x = 4$, d. h. von der Ordinate fk abgerechnete Fläche. Setzt man $x = AP = 10'$, so erhält man die Fläche $fkPM = 53\frac{1}{3} - 10\frac{2}{3} = 42\frac{14}{15}\square'$. Setzt man $x = 4$, so kommt $z = 0$, weil ja die Fläche für $x = 4$ anheben, also für diesen Werth von x, Null sein soll.

215.

Wäre $y = ax^3 + bx^2 + cx + e$ die Gleichung einer krummen Linie, so würde man auf dieselbe Weise wie vorhin, für die vom Anfangspunct der Coordinaten aus zu berechnende Fläche z die Formel $z = a \cdot \frac{x^4}{4} + b \cdot \frac{x^3}{3} + c\frac{x^2}{2} + ex$ gefunden haben, weil (Analysis § 51) die Summe der n ersten Cubikzahlen $= \frac{n^2(n+1)^2}{4} = \frac{n^4}{4} + \frac{n^3}{2} + \frac{n^2}{4}$ etc. Ebenso liesse sich leicht

zeigen, dass wenn allgemein $y = a + bx + cx^2 + \cdots + px^m$ die Gleichung einer krummen Linie und m eine ganze Zahl wäre, dann für die vom Anfangspunct der Coordinaten aus zu berechnende Fläche z, die Formel: $z = ax + b\frac{x^2}{2} + c\cdot\frac{x^3}{3} + \cdots + p\cdot\frac{x^{m+1}}{m+1}$ strenge richtig ist. Ferner, wenn die Gleichung einer krummen Linie eine solche Function wäre, die sich in eine nach ganzen, positiven Potenzen der veränderlichen Grösse fortschreitende convergente Reihe verwandeln lässt, die entsprechende Fläche durch Summation der arithmetischen Reihen bestimmt werden könnte. Wäre z. B. (Analysis § 73):

$$y = e^x = 1 + x + \frac{x^2}{1\cdot 2} + \frac{x^3}{1\cdot 2\cdot 3} + \cdots \text{ so wäre:}$$

$$z = x + \frac{x^2}{1\cdot 2} + \frac{x^3}{1\cdot 2\cdot 3} + \frac{x^4}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4} + \cdots \text{ oder:}$$

$$z = e^x - 1$$

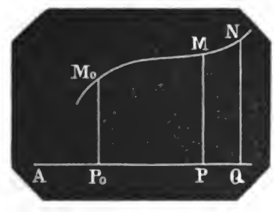
216.

Die in den vorhergehenden Paragraphen durch Summation arithmetischer Reihen bewirkte Quadraturen führten leicht auf die nahe liegende Bemerkung, dass man die Flächen aller solcher Curven, deren Gleichung eine **ganze** Function von x ist, ohne Summation erhalten kann, indem man die ganze Function mit dem Differential der Abscisse multiplicirt und dann integrirt. So ist z. B., wenn $y = ax^2 + b$ ist, die Fläche $z = \int (ax^2 + b)\,dx = a\cdot\frac{x^3}{3} + bx$, ganz wie vorhin. Dies führte nun weiter zu der Frage: Kann man wohl in allen Fällen, wenn $y = f(x)$ die gesonderte, sonst beliebige Gleichung einer krummen Linie ist, $f(x)\cdot dx$ als das Differential der Fläche und mithin das Integral $\int f(x)dx$ als die Fläche selbst betrachten? Man fand, dass dies behauptet werden darf und hat dafür verschiedene Beweise gefunden, von denen wir zwei mittheilen wollen. Den ersten nach der Grenzmethode, den andern nach der Infinitesimalmethode.

217.

Erster Beweis. Kann man das Differential (die Fluxion) der unbekannten Function einer zu berechnenden veränderlichen (fliessenden) Grösse (Fläche, Linie, Körper etc.) finden, so hat

man offenbar durch Integration auch die unbekannte Function selbst. Um nun einzusehen, dass das Differential einer von der bestimmten Abscisse $AP_0 = x_0$ anhebenden und sich bis zu der unbestimmt gelassenen Abscisse $AP = x$ erstreckenden Fläche $M_0P_0PM = z$, gleich ist dem Product aus der End-Ordinate $MP = y$ und dem Differential der Abscisse dx, sei allgemein:



$$y = f(x)$$

die Gleichung*) der krummen Linie.

Zuvörderst ist nun klar, dass die gesuchte Fläche z durch die Abscissen x_0, x völlig bestimmt, also nothwendig irgend eine Function von x ist.

Um, worauf es zunächst ankommt, das Differential dieser Function zu finden, möge $AP = x$ sich um $PQ = \Delta x$ ändern, wodurch die Fläche z um $PQNM = \Delta z$ wächst. Dieses Wachsthum Δz lässt sich durch ein Rechteck darstellen, dessen Grundlinie $= \Delta x$ und dessen Höhe eine von den zwischen $MP = y$ und $NQ = y + \Delta y$ liegenden Ordinaten, also $= y + \varepsilon$ ist, und wo ε, je nachdem die Ordinaten wachsen oder abnehmen, eine positive oder negative, jedoch mit Δx zugleich verschwindende Grösse ist, so dass also die kleine trapezförmige Fläche $MPQN = \Delta z$ dargestellt werden kann, durch:

$$\Delta z = (y + \varepsilon)\Delta x = [f(x) + \varepsilon]\Delta x$$

Hieraus folgt:

$$\frac{\Delta z}{\Delta x} = y + \varepsilon = f(x) + \varepsilon$$

Lassen wir jetzt, um aus diesen Differenzen-Quotienten den Differential-Quotienten (die Derivirte von z) zu erhalten, Δx bis zu Null abnehmen, so verschwindet auch ε und wir haben:

$$\frac{dz}{dx} = y = f(x)$$

*) Wir setzen hier, wie immer, voraus, dass $f(x)$ und ihre Derivirten sowohl für die Endwerthe x_0, x, als auch für alle dazwischen liegenden Werthe continuirlich sind, so wie auch, dass zu jeder Abscisse nur eine Ordinate gehört und kein Zeichenwechsel Statt findet.

und hieraus zunächst das fragliche Differential der gesuchten Fläche z nämlich:

$$dz = ydx = f(x) \cdot dx$$

und folglich durch Integration:

$$z = \int y dx = \int f(x) dx$$

218.

Hat man das Integral $\int f(x)dx$, welches wir mit $F(x)$ bezeichnen wollen, gefunden, so muss man demselben, wenn es für $x = x_0$, wo es anheben soll, nicht von selbst verschwindet, sondern $F(x_0) =$ einer constanten Grösse, c, wird, noch diese Constante mit dem umgekehrten Vorzeichen hinzufügen, oder was auf dasselbe führt: Ist $F(x)$ die Function, deren Differential $= f(x)dx$, so ist auch:

$$z = F(x) + c$$

Soll nun für $x = x_0$ das Integral anheben, $z = 0$ sein, so muss die Constante so beschaffen sein, dass

$$0 = F(x_0) + c$$

also $c = -F(x_0)$ sein, daher:

$$z = F(x) - F(x_0)$$

Beispiel 1. Wäre $y = \frac{1}{10}x^2 + 2$ die Gleichung einer krummen Linie, so wäre $z = \frac{1}{10}\frac{x^3}{3} + 2x + c$.

Soll das Integral von $x = 0$ anheben, so ist die Constante $c = 0$, weil für $x = 0$, auch $z = 0$. Soll dagegen das Integral von $x = 4$ anheben, so hat man zur Bestimmung der Constante $0 = \frac{1}{10} \cdot \frac{4^3}{3} + 2 \cdot 4 + c$, woraus $c = -10\frac{2}{5}$ und man hätte für die von $x = 4$ anhebende Fläche: $z = \frac{1}{10} \cdot \frac{x^3}{3} + 2x - 10\frac{2}{5}$.

Beispiel 2. Wäre $y = e^x$ die Gleichung der krummen Linie, so wäre:

$$z = \int e^x dx$$

$$z = e^x + c \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (1)$$

Soll die Fläche von $x = 0$ anheben, also für $x = 0$ auch $z = 0$ sein, so hat man:

$$0 = 1 + c \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (2)$$

Subtrahirt man (2) von (1), so wird die Constante c eliminirt und man hat für die von $x = 0$ anhebende Fläche:

$$z = e^x - 1.$$

219.

Die Nothwendigkeit, einem gefundenen Integral eine unbestimmte Constante hinzuzufügen, liegt also einfach darin, damit dasselbe ein allgemeines wird und durch richtige Bestimmung der Constante, für einen beliebigen Werth der veränderlichen Grösse anheben kann.

220.

Um anzudeuten, dass ein Integral $\int f(x)dx$ für einen bestimmten Werth, x_0, der veränderlichen Grösse anheben und dann bis zu einem andern bestimmten Werth, x_1, sich erstrecken soll, schreibt man so:

$$\int_{x_0}^{x_1} f(x)dx$$

und um das Integral innerhalb dieser Grenzen x_0 und x_1 zu bestimmen, sucht man erst das allgemeine Integral, setzt darin statt x einmal x_0 und dann x_1 und subtrahirt das erste Resultat von dem zweiten, so dass, wenn $F(x) + c$ das allgemeine Integral von $f(x)dx$ bedeutet:

$$\int_{x_0}^{x_1} f(x)dx = F(x_1) - F(x_0)$$

Anmerkung. Es ist wohl klar, dass bei allen Integrationen innerhalb bestimmter Grenzen die Constante gleich anfangs weggelassen werden kann, indem doch immer $F(x_1)+c-[F(x_0)+c] = F(x_1) - F(x_0)$ ist.

221.

Sind die Grenzen eines Integrals angegeben, so ist und heisst dasselbe ein bestimmtes Integral. Sind die Grenzen nicht angegeben, so ist und heisst dasselbe ein unbestimmtes Integral und muss dann der Allgemeinheit und Vollständigkeit halber immer eine willkürliche (unbestimmte) Constante enthalten, über die man, bestimmter Zwecke halber, verfügen kann.

Ein unbestimmtes Integral ist z. B.:

$$\int(\tfrac{1}{10}x^2+2)dx = \tfrac{1}{10}\frac{x^3}{3}+2x+c$$

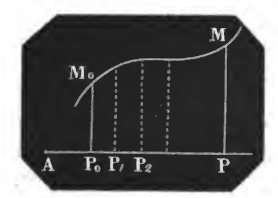
Ein bestimmtes Integral dagegen ist:

$$\int_4^{10}(\tfrac{1}{10}x^2+2)dx = \tfrac{1}{10}\cdot\frac{10^3}{3}+2\cdot 10-\left(\tfrac{1}{10}\cdot\frac{4^3}{3}+2\cdot 4\right)=43\tfrac{1}{5}$$

Aus dem unbestimmten (allgemeinen) Integral kann jedes bestimmte abgeleitet werden, vorausgesetzt jedoch, dass der Factor von dx innerhalb der fraglichen Grenzen stetig ist.

222.

* Zweiter Beweis. Um noch zu zeigen, dass man nach der Infinitesimalmethode ein bestimmtes Integral $\int_{x_0}^{x} f(x)\,dx$, als die Summe einer unendlichen Reihe unendlich kleiner Grössen und die Integration selbst als eine abgekürzte Summation betrachten kann, sei allgemein:



$$y = f(x)$$

die gegebene Gleichung einer krummen Linie und die von $AP_0 = x_0$ bis $AP = x$ sich erstreckende Fläche $M_0P_0PM = z$ gesucht.

Man denke sich das Stück der Abscissenlinie $P_0P = x - x_0$ in n gleiche Theile getheilt und setze $\frac{x-x_0}{n} = \Delta x$, so sind die Abscissen der Theilpuncte $P_0, P_1, P_2 \cdots\cdots P$ beziehlich $= x_0$, $x_0+\Delta x$, $x_0+2\Delta x, \cdots\cdots x_0+(n-1)\Delta x$, $x_0+n\Delta x$ und die dazu gehörigen Ordinaten beziehlich $= f(x_0)$, $f(x_0+\Delta x)$, $f(x_0+2\Delta x)\cdots$ $f[x_0+(n-1)\Delta x]$, $f(x_0+n\Delta x)$, mithin die Summen S_1 und S_2 der Rechtecke, indem man einmal von der ersten und einmal von der letzten Ordinate ausgeht:

$$S_1 = f(x_0)\cdot\Delta x + f(x_0+\Delta x)\cdot\Delta x + \cdots\cdots + f[x_0+(n-1)\Delta x]\cdot\Delta x$$

$$S_2 = f(x_0+\Delta x)\cdot\Delta x + f(x_0+2\Delta x)\cdot\Delta x + \cdots\cdots + f(x_0+n\Delta x)\cdot\Delta x$$

Je kleiner nun Δx oder je grösser n ist, je näher kommt jede dieser beiden Summen, wovon (im Allgemeinen) die eine zu

klein, die andere zu gross ist, einer und derselben nicht zu überschreitenden Grenze, z. Um nun einzusehen, dass das bestimmte Integral $\int_{x_0}^{x} f(x)dx$ ganz dasselbe, wie die erwähnte Grenze z (nämlich für $n = \infty$) ist, sei $F(x) + c$ das gefundene unbestimmte Integral, so dass $F(x) + c = \int f(x)dx$, mithin $F'(x)dx = f(x)dx$, so hat man (§ 46):

$$F(x + \Delta x) = F(x) + F'(x)\Delta x + F''(x)\frac{\Delta x^2}{1 \cdot 2} + F'''(x)\frac{\Delta x^3}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \cdots\cdots$$

oder, weil $F'(x) = f(x)$, mithin $F''(x) = f'(x)$ etc.

$$F(x + \Delta x) - F(x) = f(x)\Delta x + f'(x) \cdot \frac{\Delta x^2}{1 \cdot 2} + f''(x)\frac{\Delta x^3}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \cdots\cdots\cdots$$

oder, wenn man:

$$\left(\frac{1}{1 \cdot 2}f'(x) + f''(x) \cdot \frac{\Delta x}{1 \cdot 2 \cdot 3} + f'''(x) \cdot \frac{\Delta x^2}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} + \cdots\cdot\right)\Delta x^2 = \varepsilon_1 \cdot \Delta x^2$$

setzt:

$$F(x + \Delta x) - F(x) = f(x)\Delta x + \varepsilon_1 \Delta x^2$$

Setzen wir nun in dieser Fundamental-Gleichung statt x nach und nach x_0, $x_0 + \Delta x$, $x_0 + 2\Delta x, \cdots \cdot x_0 + (n-1)\Delta x$, so kommen folgende Gleichungen:

$$F(x_0 + \Delta x) - F(x_0) = f(x_0)\Delta x + \varepsilon_1 \Delta x^2$$

$$F(x_0 + 2\Delta x) - F(x_0 + \Delta x) = f(x_0 + \Delta x) \cdot \Delta x + \varepsilon_2 \Delta x^2$$

$$F(x_0 + 3\Delta x) - F(x_0 + 2\Delta x) = f(x_0 + 2\Delta x) \cdot \Delta x + \varepsilon_3 \Delta x^2$$

$$\vdots$$

$$F\big(x_0 + (n-1)\Delta x\big) - F\big(x_0 + (n-2)\Delta x\big) = f\big(x_0 + (n-2)\Delta x\big)\Delta x + \varepsilon_{n-1}\Delta x^2$$

$$F\big(x_0 + n\Delta x\big) - F\big(x_0 + (n-1)\Delta x\big) = f\big(x_0 + (n-1)\Delta x\big)\Delta x + \varepsilon_n \Delta x^2$$

Diese Gleichungen addirt und beachtet, dass auf der linken Seite jedes erste Glied einer Gleichung durch das zweite Glied der folgenden getilgt wird, hat man:

$$F(x_0 + n\Delta x) - F(x_0) = f(x_0).\Delta x + f(x_0 + \Delta x).\Delta x + .. + f[x_0 + (n-1)\Delta x].\Delta x$$
$$+ (\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3 + \cdots + \varepsilon_n)\Delta x^2$$

Aus $\frac{x - x_0}{n} = \Delta x$ folgt $x_0 + n\Delta x = x$, mithin, wenn man noch $\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3 + \cdots + \varepsilon_n = e$ setzt:

$$F(x) - F(x_0) = f(x_0)\Delta x + f(x_0 + \Delta x).\Delta x + \cdots + f[x_0 + (n-1)\Delta x].\Delta x + e\Delta x^2$$

223.

* Weil nun, wie angenommen, $F(x) + c$ das allgemeine Integral von $f(x)dx$, mithin $F(x) - F(x_0)$ das von x_0 anhebende und sich bis x erstreckende bestimmte Integral von $f(x)dx$, nämlich $= \int_{x_0}^{x} f(x)dx$ ist, so sieht man, dass wenn für n eine bestimmte, wenn auch noch so grosse Zahl, mithin auch ein bestimmtes, wenn auch noch so kleines Δx angenommen wird, doch, strenge genommen, keineswegs

$$\int_{x_0}^{x} f(x)dx = f(x_0)\Delta x + f(x_0 + \Delta x)\cdot\Delta x + \cdots + f[x_0 + (n-1)\Delta x]\Delta x$$

gesetzt werden kann, weil rechter Hand das, wenn auch noch so kleine Glied, $e\Delta x^2$, fehlt.

Wohl aber kann man sagen, dass für ein sehr kleines bestimmtes Δx das bestimmte Integral linker Hand näherungsweise der Summe rechter Hand gleich ist, indem das fehlende Glied $e\Delta x^2$ dann sehr klein wird, und es ist auch klar, dass die Summe einer festen Grenze, nämlich der gesuchten Fläche z, desto näher kommt, je grösser man n, oder je kleiner man Δx annimmt.

Wollte man, um die Grenze zu erreichen, $\Delta x = 0$ annehmen, so würde allerdings $e\Delta x^2$ verschwinden, gleichzeitig aber auch alle übrigen Glieder, und das linker Hand stehende Integral wäre dann gleich einer Summe von lauter absoluten Nullen, was ungereimt ist.

Will man also die, der vielfachen Anwendungen halber äusserst fruchtbare und bequeme ursprüngliche Vorstellung, dass ein Integral in aller Strenge genommen, eine Summe oder die Grenze einer Summe sei, nicht aufgeben, so sehen wir uns hier, um das Gesetz der Stetigkeit zu befolgen, wiederum gezwungen, auch die alte Vorstellung von unendlich kleinen Grössen zuzulassen. Denkt man sich dann n unendlich gross, also Δx unendlich klein (ein Element der Abscissenlinie), welches wir in diesem verschwindenden Zustand mit dx bezeichnen wollen, so muss, weil dx,

ohne völlig zu verschwinden, nicht mehr kleiner werden kann, das nur formell stehende Glied edx^2 weggelassen werden (§ 61), und man hat dann wirklich:

$$\int_{x_0}^{x} f(x)\,dx = f(x_0)\,dx + f(x_0 + dx)\,dx + \cdots + f(x_0 + (n-1)\,dx)\cdot dx$$

So aufgefasst, ist das bestimmte Integral gleich der Summe aller stetig auf einander folgenden Differentialen (Elemente).

Anmerkung. Man wird hiebei, als für die Folge wichtig und mit dem Leibnitz'schen Gedankengang vollkommen harmonirend, nicht unbemerkt lassen, dass in dem Integral $\int_{x_0}^{x} f(x)\,dx$, als Summe betrachtet, die untere Grenze mit eingeschlossen, die obere aber ausgeschlossen ist, weil $f(x_0)\cdot dx$ das erste und $f[x_0 + (n-1)\,dx]\cdot dx$, oder kürzer geschrieben: $f(x - dx)\cdot dx$ das letzte der stetig auf einander folgenden, unendlich schmalen Rechtecke (Elemente) ist.

224.

* Dass überhaupt ganz allgemein jedes Integral innerhalb möglicher Grenzen $\int_{x_0}^{x} f(x)\cdot dx$, auf welche Grösse es sich auch beziehen möge (Länge, Fläche, Volumen, Zeit, Kraft etc.) immer als Summe einer unendlichen Anzahl continuirlich auf einander folgenden Differentiale und die bewirkte Integration als eine abgekürzte Summation oder Zusammenfassung der Elemente betrachtet werden kann, lässt sich auch ohne Figur, rein analytisch und kürzer so zeigen:

Ist nämlich $\int f(x)\,dx = \mathrm{F}(x)$, also $\int_{x_0}^{x} f(x)\,dx = \mathrm{F}(x) - \mathrm{F}(x_0)$ und folglich, indem man ersteren Ausdruck wieder differentiirt, $f(x)\,dx = \mathrm{F}'(x)\,dx$, mithin $\mathrm{F}'(x) = f(x)$, so giebt uns die Taylor-sche Reihe (§ 46) nämlich:

$$\mathrm{F}(x + \Delta x) = \mathrm{F}(x) + \mathrm{F}'(x)\cdot\Delta x + \tfrac{1}{2}\cdot\mathrm{F}''(x)\Delta x^2 + \cdots$$

wenn wir darin, um das Gesetz des stetigen Wachsens auszudrücken, Δx unendlich klein denken: $\mathrm{F}(x+dx) = \mathrm{F}(x) + \mathrm{F}'(x)dx$ (§ 61), oder weil $\mathrm{F}'(x) = f(x)$:

$$\mathrm{F}(x + dx) = \mathrm{F}(x) + f(x)\,dx$$

Denken wir uns in dieser Fundamentalgleichung statt x, die

innerhalb des Intervalls $x - x_0$ der bezeichneten Grenzen x_0 und x consecutiv auf einander folgenden Werthe x_0, $x_0 + dx$, $x_0 + 2dx, \cdots x_0 + (n-1)dx$ gesetzt, wo also $n = \infty$, so erhalten wir die folgenden unzählbaren Gleichungen:

$$\begin{aligned}
F(x_0 + dx) &= F(x_0) + f(x_0) \cdot dx \\
F(x_0 + 2dx) &= F(x_0 + dx) + f(x_0 + dx) \cdot dx \\
F(x_0 + 3dx) &= F(x_0 + 2dx) + f(x_0 + 2dx) \cdot dx \\
&\vdots \\
F(x_0 + ndx) &= F[x_0 + (n-1)dx] + f[x_0 + (n-1)dx] \cdot dx
\end{aligned}$$

Addiren wir alle diese Gleichungen und beachten, dass (für $n = \infty$) $x_0 + ndx = x$, so ist:

$$F(x) - F(x_0) = f(x_0)dx + f(x_0 + dx)dx + f(x_0 + 2dx)dx + \cdots \\ \cdots\cdots + f[x_0 + (n-1)dx]dx$$

Wir können also in allen Fällen jedes bestimmte Integral $\int_{x_0}^{x} f(x)dx$, oder den durch Integration dafür gefundenen Ausdruck $F(x) - F(x_0)$ immer als die Summe oder Accumulation der unendlich vielen, in einem ununterbrochenen Fluss auf einander folgenden Differentiale $f(x_0)dx$, $f(x_0 + dx)dx$ etc. betrachten. In dieser wahrhaft schöpferischen Leibnitz'schen Methode liegt der eigentliche Zauber der Infinitesimal-Rechnung.

Da nun, wie schon § 71 angedeutet, in sehr vielen Fällen die allgemeine Differential-Function, d. i. die Grösse unter dem Integralzeichen durch unmittelbare Betrachtung der Umstände erkannt werden kann, so sieht man hier schon, viel deutlicher aber noch in der höhern Mechanik, den glänzenden Sieg der Leibnitz'schen Infinitesimalmethode über die schwerfällige und nicht so klare Grenzmethode. Dass z. B. bei Bestimmung der Fläche einer krummen Linie, deren Gleichung $y = f(x)$, die Ordinate y, d. i. $f(x)$ mit dem Differential der Abscisse multiplicirt, nämlich $f(x) \cdot dx$ die allgemeine Differential-Function der Fläche ist, zeigt auf anschauliche Weise ein Blick auf die Figur.

225.

Aufgabe 1. Die Parabel zu quadriren, deren Gleichung:

$$y^2 = px$$

Auflösung. Man hat hier:

$$z = \int y dx = \int p^{\frac{1}{2}} x^{\frac{1}{2}} \cdot dx = \tfrac{2}{3} p^{\frac{1}{2}} \cdot x^{\frac{3}{2}} + c$$

Soll die Fläche vom Scheitel anheben, also für $x = 0$ auch $z = 0$ sein, so ist $c = 0$, daher:

$$z = \tfrac{2}{3} x \sqrt{px} = \tfrac{2}{3} \cdot xy$$

Anmerkung. Man kann auch, wenn es unter Umständen leichter ist, so rechnen:

Aus der Gleichung der Parabel folgt: $dx = \frac{2ydy}{p}$, mithin hat man auch, alles durch y ausgedrückt:

$$z = \int y dx = \frac{2}{p} \int y^2 dy = \tfrac{2}{3} \frac{y^3}{p} = \tfrac{2}{3} xy$$

wo, wenn das Integral im Scheitel anheben soll, keine Constante nöthig ist, indem für $y = 0$, von selbst auch $z = 0$ ist.

226.

Aufgabe 2. Die Fläche der Ellipse zu finden, deren Gleichung:

$$y = \frac{b}{a} \sqrt{a^2 - x^2}$$

Auflösung. Man hat hier:

$$z = \frac{b}{a} \int \sqrt{a^2 - x^2} \cdot dx, \text{ oder:}$$

$$\frac{az}{b} = \int \sqrt{a^2 - x^2} \cdot dx$$

Das Integral kann man auf verschiedene Weise finden:

1. Cauchy setzt: $\sqrt{a^2 - x^2} = tx$, woraus $x^2 = \frac{a^2}{1 + t^2}$, dann ist (§ 201):

$$\frac{az}{b} = \int t \cdot x dx = t \cdot \tfrac{1}{2} x^2 - \tfrac{1}{2} \int x^2 dt$$

$$\frac{az}{b} = \tfrac{1}{2} t x^2 - \tfrac{1}{2} \int \frac{a^2}{1 + t^2} dt$$

$$\frac{az}{b} = \tfrac{1}{2} t x^2 - \tfrac{1}{2} a^2 \operatorname{arc\,tg} t$$

und wenn für t sein Werth $\frac{\sqrt{a^2-x^2}}{x}$ zurückgesetzt wird:

$$z = \frac{1}{2}\frac{bx}{a}\sqrt{a^2-x^2} - \frac{1}{2}ab \operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{\sqrt{a^2-x^2}}{x} + C$$

Soll die Fläche bei CD anheben, also für $x = 0$ auch $z = 0$ sein, so hat man, weil $\operatorname{arc} (\operatorname{tg} = \infty) = \frac{1}{2}\pi$

$$0 = 0 - \frac{1}{2}ab \cdot \frac{1}{2}\pi + C$$

Diese Gleichung von voriger subtrahirt (§ 218, Beispiel 2):

$$z = \frac{1}{2} \cdot \frac{b}{a} x\sqrt{a^2-x^2} + \frac{1}{2}ab\left(\frac{\pi}{2} - \operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{\sqrt{a^2-x^2}}{x}\right)$$

Ist, im ersten Quadranten, die tangente eines Bogens $= \frac{\sqrt{a^2-x^2}}{x}$, so ist, wie leicht einzusehen, die tangente des Bogens der ersteren zu einem ganzen Quadranten $\left(\frac{\pi}{2}\right)$ ergänzt, $= \frac{x}{\sqrt{a^2-x^2}}$, so dass also:

$$\operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{x}{\sqrt{a^2-x^2}} + \operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{\sqrt{a^2-x^2}}{x} = \frac{\pi}{2}$$

$$\operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{x}{\sqrt{a^2-x^2}} = \frac{\pi}{2} - \operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{\sqrt{a^2-x^2}}{x}$$

Dies substituirt, ist auch:

$$z = \frac{1}{2}\frac{b}{a} x \sqrt{a^2-x^2} + \frac{1}{2}ab \operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{x}{\sqrt{a^2-x^2}}$$

oder auch (Trigon. § 100, 5):

$$z = \frac{1}{2} \cdot \frac{b}{a} x\sqrt{a^2-x^2} + \frac{1}{2}ab \operatorname{arc} \sin \frac{x}{a} \cdots\cdots\cdots (1)$$

Man kann also ein und dasselbe Integral oftmals unter verschiedenen Formen darstellen. Man hätte statt des sinus auch den cosinus oder die cotangente hineinbringen können.

2. Um das Integral:

$$z = \frac{b}{a}\int\sqrt{a^2 - x^2} \cdot dx$$

zu finden, kann man auch so verfahren:

Man setze: $x = a \sin\varphi$, mithin $dx = a \cos\varphi \cdot d\varphi$, so ist:

$$z = ab \int \cos^2 \varphi d\varphi \text{ und } (\S\ 210)$$

$$z = \tfrac{1}{2}ab \int (\cos 2\varphi + 1) d\varphi$$

$$z = \tfrac{1}{2}ab\left(\frac{\sin 2\varphi}{2} + \varphi\right)$$

Aus der Annahme: $a \sin\varphi = x$, folgt, dass für $x = 0$ auch $\varphi = 0$ und für $x = a$, $\varphi = \frac{\pi}{2}$ ist. Soll demnach das Integral von $x = 0$, also auch von $\varphi = 0$ anfangen, so ist keine Constante nöthig. Soll das Integral dann bis $x = a$ genommen werden, so muss man $\varphi = \frac{1}{2}\pi$ setzen. In Zeichen:

$$z = \frac{b}{a} \int_0^a \sqrt{a^2 - x^2} \cdot dx = \tfrac{1}{2}ab \int_0^{\frac{1}{2}\pi} (\cos 2\varphi + 1) d\varphi$$

Will man in dem gefundenen Integral:

$$z = \tfrac{1}{2}ab\left(\frac{\sin 2\varphi}{2} + \varphi\right) \cdots\cdots\cdots\cdots (2)$$

den Bogen φ wieder durch x ausdrücken, so folgt aus $a \sin\varphi = x$, dass $\varphi = \text{arc} \sin \frac{x}{a}$ und aus $\sin\varphi = \frac{x}{a}$, dass $\cos\varphi = \frac{\sqrt{a^2 - x^2}}{a}$, mithin $\sin 2\varphi = \frac{2x\sqrt{a^2 - x^2}}{a^2}$. (Trigon. § 100, 16).

Es ist daher wie vorhin:

$$z = \tfrac{1}{2} \frac{b}{a} x \sqrt{a^2 - x^2} + \tfrac{1}{2}ab \cdot \text{arc} \sin \frac{x}{a}$$

Für $x = 0$ ist $z = 0$. Setzt man $x = \frac{1}{2}a$, so hat man $z = \frac{ab\sqrt{3}}{8} + \frac{ab}{2} \cdot \frac{\pi}{6}$. Setzt man $x = a$, so hat man den vierten Theil der Ellipse $= \frac{1}{2}ab \cdot \frac{1}{2}\pi$. Die Fläche der ganzen Ellipse ist also:

$$z = ab\pi$$

Anmerkung. Setzt man in dem für $x = 0$ verschwindenden Integral (1) $x = -a$, oder was dasselbe ist, in dem für $\varphi = 0$ verschwindenden Integral (2), $\varphi = -\frac{1}{2}\pi$, so erhält man die Fläche des Quadranten ACD, jedoch negativ $(= -\frac{1}{4}ab\pi)$. Dies ist ganz

natürlich, wenn man das Integral als Summe betrachtet, indem dann in der allgemeinen Summationsformel (§ 224) $\int_0^{-a} f(x)dx$, für positive Ordinaten, alle Glieder rechter Hand, wegen des negativen Factors $-dx$, negativ werden. Integrirt man aber von $x=-a$ bis $x=0$, oder von $\varphi=-\frac{1}{2}\pi$ bis $\varphi=0$, so erhält man dieselbe Fläche positiv. Integrirt man von $x=-a$ bis $x=+a$, oder von $\varphi=-\frac{1}{2}\pi$ bis $\varphi=+\frac{1}{2}\pi$, so erhält man die halbe Ellipse, in Zeichen:

$$\frac{b}{a}\int_{-a}^{+a}\sqrt{a^2-x^2}\,dx=\tfrac{1}{2}ab\int_{-\frac{1}{2}\pi}^{+\frac{1}{2}\pi}(\cos 2\varphi+1)\,d\varphi=\tfrac{1}{2}ab\pi.$$

Dies (nämlich das Integral als Summe betrachtet) lehrt zugleich auch, dass man den zu einer trigonometrischen, positiven oder negativen Function gehörigen Bogen stets in der kürzesten positiven oder negativen Drehung nehmen muss und dass der Bogen hier nur als Zahlgrösse in Betracht kommt.

227.

Aufgabe 3. Die Hyperbel zu quadriren, deren Gleichung:

$$y=\frac{b}{a}\sqrt{x^2-a^2}$$

Auflösung. Man hat hier:

$$z=\frac{b}{a}\int\sqrt{x^2-a^2}\cdot dx$$

Setze $\sqrt{x^2-a^2}=tx$, also $x^2=\frac{a^2}{1-t^2}$, so ist:

$$\frac{az}{b}=\int t\cdot x dx=t\cdot\frac{x^2}{2}-\tfrac{1}{2}\int x^2 dt$$

$$\frac{az}{b}=\frac{tx^2}{2}-\frac{a^2}{2}\int\frac{dt}{1-t^2}\quad\text{und (§ 206)}$$

$$\frac{2az}{b}=tx^2-\frac{a^2}{2}l\left(\frac{1+t}{1-t}\right)$$

$$z=\frac{bx}{2a}\sqrt{x^2-a^2}-\frac{ab}{4}l\left(\frac{x+\sqrt{x^2-a^2}}{x-\sqrt{x^2-a^2}}\right)$$

$$z=\frac{bx}{2a}\sqrt{x^2-a^2}-\frac{ab}{4}l\left(\frac{x+\sqrt{x^2-a^2}}{a}\right)^2$$

$$z=\frac{bx}{2a}\sqrt{x^2-a^2}-\frac{ab}{2}l\left(\frac{x+\sqrt{x^2-a^2}}{a}\right)$$

Soll die Fläche für $x=a$ (im Scheitel B) anheben, so ist keine Constante nöthig, weil das Integral für $x=a$ von selbst verschwindet.

Anmerkung. Zieht man vom Mittelpunct C nach dem Endpunct M der Ordinate $MP=y$, die Grade CM, so ist die Sectorfläche:

$$MCB=\tfrac{1}{2}xy-z, \text{ oder}$$

$$MCB=\frac{ab}{2}l\left(\frac{x+\sqrt{x^2-a^2}}{a}\right)$$

Wird $x=\infty$, so wird CM zur Asymptote und man sieht, dass die zwischen der Asymptote und dem Hyperbelast liegende Fläche unendlich wird.

228.

Aufgabe 4. Die Quadratur der Hyperbel zu finden, deren Asymptoten-Gleichung:

$$y=\frac{a^2}{x}$$

Auflösung. Es ist hier:

$$z=a^2\int\frac{dx}{x}$$

$$z=a^2\,lx+c$$

Soll die Fläche bei A anheben, also für $x=0$ auch $z=0$ sein, so ist, weil $l0=-\infty$.

$$0=-\infty+c$$

Subtrahirt man diese Gleichung von der vorhergehenden, so ist:

$$z=a^2\,lx+\infty \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (1)$$

Man sieht hier, dass die Constante auch unendlich sein kann. Soll die Fläche sich von $x=0$ bis $AP=x_0$ erstrecken, so ist:

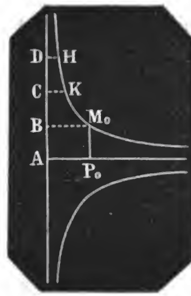
$$z=a^2\,lx_0+\infty \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (2)$$

Für $x_0=0$ ist $z=0$; für $x_0=1$ ist $z=\infty$. Es ist also, was wir schon aus vorhergehendem § wissen, die zwischen der Asymptote Ay und dem unendlichen Hyperbelast liegende Fläche unendlich gross. Will man die Fläche von $AP=x_0$ bis $AP=x$ haben, so ist (2) von (1) subtrahirt:

$$M_0P_0PM=a^2(lx-lx_0)=a^2\,l\left(\frac{x}{x_0}\right)$$



229.



Aufgabe 5. Die Linie zn quadriren, deren Gleichung:

$$y = \frac{4}{\sqrt{x}}$$

Auflösung. Die Ordinatenachse sowohl, als die positive Seite der Abscissenachse sind Asymptoten. Für die, oberhalb der Abscissenachse (für positive Ordinaten) liegende Fläche hat man hier:

$$z = \int \frac{4}{\sqrt{x}} dx = 4 \int x^{-\frac{1}{2}} dx$$

$$z = 8x^{\frac{1}{2}}$$

Soll die Fläche von $x = 0$ anheben, so braucht keine Constante hinzugefügt zu werden, weil das Integral für $x = 0$ von selbst verschwindet.

Nimmt man hier z. B. $x = 9' = AP_0$, so wird $z = 24\square'$.

Es scheint ungereimt zu sein, eine Fläche, die sich in's Unendliche erstreckt (nicht völlig begrenzt ist), berechnen zu wollen. Die Möglichkeit ergiebt sich jedoch, wenn man die Sache aus folgendem Gesichtspunct betrachtet: Man denke sich auf der Asymptote AY gleiche Stücke abgesteckt, AB = BC = CD = etc., so bilden hier die unzähligen Flächenstücke ABM_0P_0, $BCKM_0$ etc. eine unendliche, aber convergente Reihe, deren Summe genau $= 24\square'$ ist. Dies war vorhin bei der Hyperbel (§ 228) nicht der Fall, wie es auch hier für die andere Asymptote AX nicht der Fall ist: denn für $x = \infty$ ist auch $z = \infty$. Dass sich die krumme Linie der Ordinatenachse viel rascher nähert, als der Abscissenachse, folgt aus ihrer Gleichung, die man auch so schreiben kann: $x = \frac{16}{y^2}$ (§ 77).

230.

Aufgabe 6. Die Quadratur der Exponentiallinie zu finden, deren Gleichung:

$$y = e^x$$

Auflösung. Es ist hier: $z = \int e^x dx$, oder:

$$z = e^x + c \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (1)$$

Soll die Fläche bei A anheben, so muss für $x = 0$ auch $z = 0$ sein. Dies giebt zur Bestimmung der Constante:

$$0 = 1 + c \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (2)$$

Mithin (2) von (1) subtrahirt:

$$z = e^x - 1$$

Setzt man $x = -\infty$, so findet man die zwischen der Asymptote, Ordinate AB und dem unendlichen Curvenast liegende Fläche als eine endliche Grösse, jedoch negativ, nämlich $= -1\square$ (§ 226, Anmerkung).

Integrirt man von $x = -\infty$ bis $x = 0$, in Zeichen:

$$z = \int_{-\infty}^{0} e^x dx = e^0 - e^{-\infty}$$

so erhält man dieselbe Fläche positiv, nämlich: $z = 1\square$. Dasselbe erhält man für die Exponentiallinie $y = e^{-x}$ und für das bestimmte Integral:

$$\int_{0}^{+\infty} e^{-x} dx = 1$$

231.

Aufgabe 7. Die Cycloide zu quadriren.

Auflösung. Zufolge § 156 hat man:

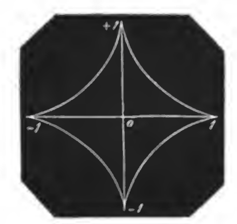
$$x = r\theta - r\sin\theta$$
$$y = r - r\cos\theta$$
$$dx = r(1 - \cos\theta)\,d\theta$$
$$z = r^2 \int (1 - \cos\theta)^2 d\theta$$
$$z = r^2 \int (1 - 2\cos\theta + \cos^2\theta)\,d\theta$$
$$z = r^2 \int (\tfrac{3}{2} - 2\cos\theta + \tfrac{1}{2}\cos 2\theta)\,d\theta$$
$$z = r^2 (\tfrac{3}{2}\theta - 2\sin\theta + \tfrac{1}{4}\sin 2\theta).$$

Soll das Integral von $x = 0$ oder $\theta = 0$ anheben, so ist keine Constante nöthig. Setzt man $\theta = 2\pi$, so hat man die ganze Fläche der Cycloide, nämlich:

$$z = 3r^2\pi$$

Die Fläche der Cycloide ist also just dreimal so gross, als die Fläche des Erzeugungskreises.

232.



Aufgabe 8. Die Hypocycloide zu quadriren, deren Gleichung $y^{\frac{2}{3}} + x^{\frac{2}{3}} = 1$. oder:

$$y = (1 - x^{\frac{2}{3}})^{\frac{3}{2}}$$

Auflösung. Es ist:

$$z = \int_0^1 (1 - x^{\frac{2}{3}})^{\frac{3}{2}} dx$$

oder, wenn man, nach Cauchy, $x = \sin^3\theta$, mithin $dx = 3\sin^2\theta\cos\theta d\theta$ setzt, so ist auch:

$$z = 3\int_0^{\frac{1}{2}\pi} \sin^2\theta \cdot \cos^4\theta d\theta$$

$$z = 3\int_0^{\frac{1}{2}\pi} (\cos^4\theta - \cos^6\theta)\, d\theta \text{ und } (\S\ 210)$$

$$z = 3 \cdot \int_0^{\frac{1}{2}\pi} \left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{8}\cos 4\theta + \frac{1}{2}\cos 2\theta + \frac{3}{8} \\ -(\frac{1}{32}\cos 6\theta + \frac{3}{16}\cos 4\theta + \frac{15}{32}\cos 2\theta + \frac{5}{16}) \end{array} \right\} d\theta$$

Anmerkung. Man sieht hier (und in ähnlichen Fällen) leicht ein, dass man für die angegebenen Grenzen, von der Entwickelung der Potenzen $\cos^4\theta$, $\cos^6\theta$, nur die constanten Glieder $\frac{3}{8} - \frac{5}{16} = \frac{1}{16}$ mit $d\theta$ zu multipliciren und zu integriren braucht, indem die Integrale aller übrigen Glieder lauter sinus von graden Vielfachen von θ geben, welche deshalb, sowohl für $\theta = 0$, als auch für $\theta = \frac{1}{2}\pi$ doch verschwinden. Das gesuchte Integral ist also $= \frac{3}{16} \cdot \frac{\pi}{2}$, mithin die ganze Fläche für alle vier Quadranten: $z = \frac{3}{8}\pi$.

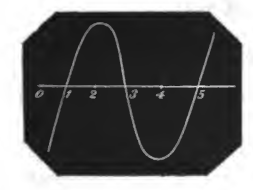
233.

Man muss bei jeder Quadratur einer krummen Linie, wenn man keine negativen Flächen gestatten will, den Lauf der Linie kennen, namentlich ob und wo sie die Abscissenlinie schneidet. Denn sind die Ordinaten negativ, so müssen, vermöge der allgemeinen Summationsformel (§ 223), für positive Abscissen alle Factoren von dx negativ werden. Man muss deshalb jedes oberhalb und unterhalb der Abscissenachse liegende Flächenstück besonders berechnen, also von Durchschnittspunct zu Durchschnittspunct integriren, die mit dem Minus-Zeichen behafteten Flächenstücke als positiv betrachten und alles addiren.

234.

Aufgabe 9. Die parabolische Linie zu quadriren, deren Gleichung:

$$y = x^3 - 9x^2 + 23x - 15$$



Auflösung. Diese Gleichung lässt sich (die rechte Seite in Factoren zerlegt, Anal. § 116) auch so schreiben:

$$y = (x-1)(x-3)(x-5)$$

Aus dieser Form erkennt man nun leichter, dass für alle Werthe von x zwischen 0 und 1 die Ordinaten negativ, zwischen 1 und 3 positiv, zwischen 3 und 5 negativ und für 1, 3, 5 Null sind.

Soll nun die Fläche von $x = 1$ bis $x = 5$ berechnet werden, in Zeichen:

$$z = \int_{x=1}^{x=5} y dx$$

so muss man, des § 233 beregten Umstandes halber, das Integral hier in zwei Theile zerlegen und so schreiben:

$$z = \int_{x=1}^{x=3} y dx + \int_{x=3}^{x=5} y dx$$

Weil nun das allgemeine Integral:

$$z = \frac{x^4}{4} - 3x^3 + \frac{23}{2} x^2 - 15x + c$$

so ist für $x=1$, $z_{,}=-6\frac{1}{4}+c$; für $x=3$ ist $z_{2}=-2\frac{1}{4}+c$, mithin das von $x=1$ bis $x=3$ oberhalb der Abscissenlinie liegende Flächenstück $z_{2}-z_{,}=4\square$.

Setzt man $x=5$, so ist $z_{3}=-6\frac{1}{4}+c$, mithin das unterhalb liegende Flächenstück $=z_{3}-z_{2}=-4\square$. Es ist mithin (§ 233) die arithmetische Summe beider Flächen $z=8\square$.

Hätte man den Lauf der krummen Linie nicht berücksichtigt und das Integral rein arithmetisch von $x=1$ bis $x=5$ genommen, so hätte man $z=0$ erhalten.

235.

Aufgabe 10. Die logarithmische Linie zu quadriren, deren Gleichung:

$$y=a\cdot lx$$

Auflösung. Man hat hier:

$$z=a\int lx dx \text{ und (§ 201)}$$

$$z=axlx-ax+c$$

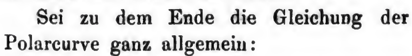
Soll die Fläche von $x=0$ anheben, so ist die Constante $c=0$ (§ 84), daher:

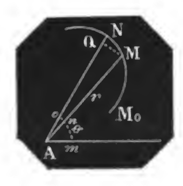
$$z=ax(lx-1)$$

Von $x=0$ bis $x=1$ ist die Fläche eine endliche Grösse, jedoch wegen der negativen Ordinaten, mit dem Minus-Zeichen behaftet, $=-a$.

236.

Um schliesslich auch noch Polarcurven zu quadriren, kommt es zunächst darauf an, aus der Gleichung der Polarcurven einen Ausdruck für das Differential der Fläche zu finden.


Sei zu dem Ende die Gleichung der Polarcurve ganz allgemein:



$$r=f(\theta)$$

Lässt man den mit der Längeneinheit beschriebenen Bogen $mn=\theta$ um $no=\Delta\theta$ wachsen, so wächst der radius vector r um

NQ = Δr *) und es ist der mit AM = r beschriebene Kreisbogen $\widehat{MQ} = r\Delta\theta$. Nimmt man $\Delta\theta$ sehr klein, so kann man näherungsweise AMN als ein Dreieck betrachten, worin AN = $r + \Delta r$ die Grundlinie und MQ = $r\Delta\theta$ die Höhe ist, und es ist dann näherungsweise das Wachsthum der Fläche:

$$\Delta z = \tfrac{1}{2} r\Delta\theta (r + \Delta r)$$

$$\Delta z = \tfrac{1}{2} r^2 \Delta\theta + \tfrac{1}{2} r\Delta r\Delta\theta$$

$$\frac{\Delta z}{\Delta\theta} = \tfrac{1}{2} r^2 + \tfrac{1}{2} r\Delta r$$

Lässt man nun, um aus diesem Differenzen-Quotienten den Differential-Quotienten (die Derivirte von z) zu erhalten, $\Delta\theta$ bis zu 0 convergiren, so verschwindet gleichzeitig $\Delta r = M\Delta\theta + N\Delta\theta^2 + ..$ und wir haben dann:

$$\frac{dz}{d\theta} = \tfrac{1}{2} r^2$$

$$dz = \tfrac{1}{2} r^2 d\theta = \tfrac{1}{2}[f(\theta)]^2 d\theta$$

$$z = \tfrac{1}{2} \int [f(\theta)]^2 \, d\theta = \tfrac{1}{2} \int r^2 d\theta$$

* Nach der Infinitesimalmethode ist in dem unendlich kleinen Sector AMN, sogleich AN = $r + dr$, $no = d\theta$, MQ = $r \cdot d\theta$ (§ 67), und weil in $\tfrac{1}{2} r d\theta (r + dr)$ die Infinitesimalgrösse dr gegen die endliche Grösse r oder auch $\tfrac{1}{2} r d\theta dr$ gegen $\tfrac{1}{2} r^2 d\theta$ verschwindet, so leuchtet unmittelbar ein, dass $\tfrac{1}{2} r^2 d\theta = \tfrac{1}{2}(f\theta)^2 \cdot d\theta$ das allgemeine Differential der zu bestimmenden Fläche ist, und dass hier ganz dieselben Schlüsse Statt finden, wie § 224. Ist nämlich das allgemeine Integral $\int \tfrac{1}{2}(f\theta)^2 \cdot d\theta = F(\theta) + c$, mithin $\int_{\theta_0}^{\theta} \tfrac{1}{2}(f\theta)^2 d\theta = F(\theta) - F(\theta_0)$ und $\tfrac{1}{2}(f\theta)^2 = F^1(\theta)$, so kann man hier ganz so wie in § 224 das bestimmte Integral $\int_{\theta_0}^{\theta} \tfrac{1}{2}(f\theta)^2 \cdot d\theta$, d. h. den durch Integration dafür gefundenen Ausdruck $F(\theta) - F(\theta_0)$ als Summe der in dem Intervall $\theta - \theta_0$ stetig auf einander folgenden Differentiale $\tfrac{1}{2}(f\theta_0)^2 d\theta$, $\tfrac{1}{2}[f(\theta_0 + d\theta)]^2 \cdot d\theta$, $\tfrac{1}{2}[f(\theta_0 + 2d\theta)]^2 d\theta$ etc. betrachten.

---

*) Es kann mit wachsendem θ der Radius vector auch abnehmen und Δr negativ sein.

237.

Aufgabe. Die Archimedische Spirale zu quadriren, deren Gleichung:

$$r = \frac{a}{2\pi} \cdot \theta$$

Auflösung. Man hat hier:

$$z = \tfrac{1}{2} \int \left(\frac{a}{2\pi}\right)^2 \cdot \theta^2 d\theta$$

$$z = \frac{a^2}{24\pi^2} \cdot \theta^3$$

Soll das Integral von $\theta = 0$ anheben, so ist keine Constante nöthig.

Für eine halbe Umdrehung ($\theta = \pi$) ist $z = \frac{a^2}{24} \cdot \pi$ (S. Figur, höhere Geometrie § 96).

Für eine ganze Umdrehung ($\theta = 2\pi$) ist $z = \frac{a^2}{3}\pi$.

Man kann auch so rechnen (§ 225, Anmerkg.): Aus $r = \frac{a}{2\pi}\theta$ folgt: $d\theta = \frac{2\pi}{a} dr$, mithin ist auch:

$$z = \frac{\pi}{a} \int r^2 dr$$

$$z = \frac{\pi}{3a} r^3$$

wo keine Constante nöthig ist, wenn die Fläche von $r = 0$ anheben soll.

Für eine halbe Umdrehung ($r = \frac{1}{2}a$) ist $z = \frac{a^2}{24}\pi$. Für $r = a$ ist $z = \frac{a^2}{3}\pi$.

Anmerkung 1. Bei der zweiten vollen Revolution beschreibt der Radius vector, der im Anfang $= a$ ist und am Ende derselben $= 2a$ wird, die Fläche der ersten völligen Revolution offenbar aufs Neue wieder, und so in der Folge. Um also die einfache Fläche zu erhalten, welche nach m Revolutionen beschrieben worden (zwischen den m Windungen enthalten ist) hat man:

$$z = \frac{a^2}{8\pi^2}\int_{(m-1)2\pi}^{m.2\pi} \theta^2 d\theta = \frac{\pi}{a}\int_{(m-1)a}^{ma} r^2 dr$$

$$r = (m^2 - m + \tfrac{1}{3})a^2\pi$$

Für $m = 1,\ 2,\ 3 \cdots$ ist $z = \frac{1}{3}a^2\pi,\ 2\frac{1}{3}a^2\pi,\ 8\frac{1}{3}a^2\pi$ etc.

Anmerkung 2. Will man die Fläche (Spire) haben, welche zwischen der $m$ten und $m+1$ten Windung enthalten ist, so braucht man offenbar nur die Fläche von m Revolutionen von der von $m+1$ zu subtrahiren. Man hat dann nach vorhergehender Formel:

$$z = 2ma^2\pi.$$

Die zwischen der 1sten und 2ten Windung ($m = 1$) enthaltene Fläche ist hiernach $= 2a^2\pi$, und die zwischen der $m$ten und $m+1$ten Windung enthaltene Fläche ist, wie schon Archimed gefunden, just m mal so gross, als die Fläche, welche zwischen der 1sten und 2ten Windung enthalten ist.

238.

Aufgabe 1. Die Fläche der vierschlingigen Linie zu finden, deren Gleichung (s. Fig. höh. Geom. § 77):

$$r = a \cdot \sin 2\theta$$

Aufgabe 2. Die Fläche der Cardioide zu finden, deren Gleichung (s. Fig. höh. Geom. § 65):

$$r = 2a(1 + \cos\theta) = 4a \cdot \cos^2 \tfrac{1}{2}\theta$$

Aufgabe 3. Die Schlinge des Cartesianischen Blattes zu quadriren, dessen Gleichung (s. Fig. höh. Geom. § 79):

$$r = \frac{3a \cdot \sin\theta \cdot \cos\theta}{\sin^3\theta + \cos^3\theta} = \frac{3a \cdot \operatorname{tg}\theta}{(1 + \operatorname{tg}^3\theta) \cdot \cos\theta}$$

Auflösung 1. Es ist für alle vier Schleifen (§ 210):

$$z = \tfrac{1}{2}a^2\pi$$

Auflösung 2. Es ist (§ 210):

$$z = 6a^2\pi$$

Auflösung 3. Man findet, $\operatorname{tg}\theta = u$ gesetzt (§ 199, 2):

$$z = \tfrac{3}{2}a^2$$

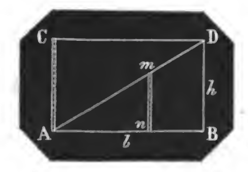
239.

* Wir haben in § 223 nach der Infinitesimalmethode die Fläche einer Orthogonalcurve als aus Elementar-Rechtecken zusammengefügt, fingirt, bei denen nur die eine Dimension, die Grundlinie dx, unendlich klein, folglich jedes Element ein unendlich Kleines erster Ordnung ist und sie durch Integral-Rechnung summirt. Nach derselben Methode kann man die ganze Fläche aber auch als aus Elementar-Rechtecken zusammengesetzt fingiren, bei welchen sowohl Grundlinie als Höhe unendlich klein und mithin jede Elementarfläche ein unendlich Kleines zweiter Ordnung ist. Ebenso kann man einen Körper aus graden Prismen zusammengesetzt fingiren, deren Länge, Breite und Höhe unendlich klein, folglich jeder Elementarkörper ein unendlich Kleines dritter Ordnung ist. Da nun diese Betrachtungsweise auf sogenannte Doppel- und Dreifach-Integrale führt und dieselben in der Anwendung der Integral-Rechnung, namentlich auf Mechanik und Physik, nicht zu vermeiden sind, so wollen wir hier versuchen, den Anfänger durch leichte geometrische Beispiele auf diese subtile Sache vorzubereiten. (Vergl. § 65.)

240.

* Man kann das Differential eines Rechtecks, AD, darstellen durch:

$$dz = dx \cdot dy$$



und sich das ganze Rechteck als aus solchen Elementarrechtecken bestehend denken, wo Grundlinie und Höhe, dx, dy, beide unendlich klein sind.

Um nun anzudeuten, dass diese Elementarflächen erstlich in der Ausdehnung von A nach C, d. i. von $y = 0$ bis $y = h$ und dann die erhaltene unendlich schmale Schichte AC in der Ausdehnung von A nach B, d. i. von $x = 0$ bis $x = b$ genommen werden soll, bedürfen wir zweier Summen- oder Integralzeichen. Man schreibt nämlich so:

$$z = \int_{x=0}^{x=b} \int_{y=0}^{y=h} dx dy$$

und um dieses zweifache oder Doppel-Integral zu finden, integriren wir erst in Bezug auf y, dann ist:

$$z = \int_0^b dx \cdot \int dy = \int_0^b dx \cdot y + c$$

Wird dies erste Integral, wie gefordert, von $y = 0$ bis $y = h$ genommen, wonach die Constante c überflüssig ist, so hat man:

$$z = \int_0^b dx \cdot h = \int_0^b h \cdot dx$$

Unter dem zweiten Integralzeichen steht jetzt das unendlich schmale Rechteck AC. Integriren wir jetzt in Bezug auf x und zwar von $x = 0$ bis $x = b$, so ist richtig:

$$z = bh$$

Anmerkung. Weil in vorstehendem Beispiel x und y nicht von einander abhängen, so hätte man auch in umgekehrter Ordnung, erst in Bezug auf x und dann in Bezug auf y, integriren können. Wäre aber y von x, folglich auch das Wachsthumbestreben der Ordinate, nämlich dy von x abhängig (§ 62), und also auch in den Elementar-Rechtecken dx, dy keineswegs gleich gross, so muss man nothwendig erst in Bezug auf die abhängige Grösse integriren. Wollte man z. B. nach obiger Formel $dz = dx \cdot dy$, die Fläche des Dreiecks ABD berechnen, so ist die Gleichung der graden Linie AD:

$$y = \frac{h}{b} x$$

dann ist: $$z = \int_0^x \int_0^y dx dy = \int_0^x dx \int_0^y dy = \int_0^x y dx$$

Da nun hier y von x abhängt, eine Function von x ist, so muss man diese statt y substituiren. Diese erste Integration giebt uns ein von $mn = y$, also auch mittelbar von $An = x$, abhängendes unendlich kleines Rechteck mn, nämlich:

$$z = \int_0^x \frac{h}{b} x \cdot dx = \frac{h}{b} \int_0^x x dx$$

Integrirt man jetzt in Bezug auf x, so ist:

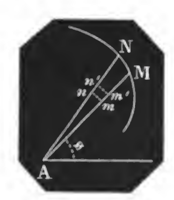
$$z = \tfrac{1}{2} \frac{h}{b} x^2 + c$$

Nimmt man dies Integral von $x = 0$ bis $x = b$, so ist:

$$z = \tfrac{1}{2} bh.$$

241.

* In Betreff der Polarcurven kann man das Differential der Fläche, statt durch ein unendlich Kleines erster Ordnung, nämlich durch ein Dreieck, dessen Höhe unendlich klein ist, auch folgendermaassen durch ein unendlich Kleines zweiter Ordnung ausdrücken.



Es sei A der Pol, AM, AN zwei Leitstrahlen, die den, mit der Einheit beschriebenen unendlich kleinen Bogen $d\theta$ zwischen sich fassen. Ferner sei $Am = \varrho$, also $\widehat{mn} = \varrho \cdot d\theta$; ferner $mm' = d\varrho$, dann ist die unendlich kleine als Rechteck zu betrachtende Elementar-Fläche $mm'n'n$ das Differential und $= \varrho d\theta \cdot d\varrho$. Mithin:

$$z = \int\int \varrho d\theta d\varrho.$$

Man integrirt nun erst in Bezug auf ϱ von $\varrho = 0$ bis $\varrho = r$. Ist dann r eine Function von θ, so muss diese statt r gesetzt, und dann in Bezug auf θ integrirt werden.

Die erste Integration giebt uns die Summe aller in der Richtung des Leitstrahls vom Pol bis an die krumme Linie auf einander folgenden Elemente, welche zusammen ein Dreieck bilden, dessen Grundlinie $= r$ und dessen Höhe $= r d\theta$, nämlich wie in § 236:

$$z = \int \tfrac{1}{2} r \cdot r d\theta.$$

Wollte man nach dieser Formel z. B. den Inhalt eines Kreises berechnen, dessen Radius $= a$, so hat man, weil hier a von θ unabhängig ist:

$$z = \tfrac{1}{2} a^2 \int_0^{2\pi} d\theta = a^2 \pi.$$

Sechszehntes Buch.

Rectification krummer Linien.

242.

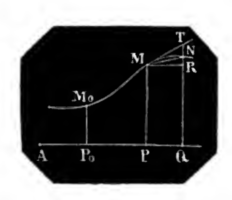
Bei der Berechnung irgend eines Quantums (Fläche, Linie, Volumen etc.) kommt es, wie schon bemerkt, zunächst immer nur darauf an, das Differential der zu berechnenden Grösse zu finden, um dann durch Integration die Grösse selbst zu haben. Die Integration kann man in solchem Falle immer als eine Summation betrachten, das Differential aber findet man entweder nach der Grenzmethode (indem man erst die Derivirte sucht) oder direct und bequemer nach der Infinitesimalmethode.

Wir haben beiderlei Wege im Vorhergehenden so umständlich bezeichnet, dass wir es in methodischer Hinsicht jetzt für besser halten, den Anfänger zum Gebrauch seiner eigenen Kraft aufzufordern. Denn etwas ganz anderes ist es, die Infinitesimal-Rechnung selbstständig anzuwenden, was eigenes Nachdenken erfordert, als sie bloss zu verstehen. Wir wollen zu dem Ende das, was gefunden werden soll, in Aufgaben kleiden, damit der Anfänger erst selbst über die Lösung nachsinnen kann.

243.

Aufgabe 1. Es sei allgemein:

$$y = f(x)$$



die Gleichung einer krummen Linie. Man sucht eine Formel, nach welcher man die Länge eines Bogens $\widehat{M_0M} = s$, dessen Endpuncts - Abscissen $AP_0 = x_0$ und $AP = x$ gegeben sind, berechnen kann.

Auflösung. Um zuerst das Differential des Bogens s zu finden, lassen wir

die Abscisse $AP = x$ um $PQ = \Delta x$ wachsen, alsdann wächst die Ordinate $MP = y$ um $NR = \Delta y$ und der Bogen $M_0M = s$ um $\widehat{MN} = \Delta s$.

Es ist nun $\widehat{MN} > \overline{MN}$ und $\widehat{MN} < \overline{MT} + \overline{NT}$, oder, weil die Sehne $\overline{MN} = \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2} = \Delta x \sqrt{1 + \frac{\Delta y^2}{\Delta x^2}}$ und (weil $RT = \Delta x \cdot \operatorname{tg} \tau = \Delta x \cdot \frac{dy}{dx}$ ist) so ist:

$$MT = \sqrt{\Delta x^2 + \Delta x^2 \cdot \frac{dy^2}{dx^2}}; \qquad NT = \Delta x \cdot \frac{dy}{dx} - \Delta y$$

$$\Delta s > \Delta x \cdot \sqrt{1 + \frac{\Delta y^2}{\Delta x^2}}$$

$$\Delta s < \Delta x \cdot \sqrt{1 + \frac{dy^2}{dx^2}} + \Delta x \cdot \frac{dy}{dx} - \Delta y$$

$$\frac{\Delta s}{\Delta x} > \sqrt{1 + \frac{\Delta y^2}{\Delta x^2}}$$

$$\frac{\Delta s}{\Delta x} < \sqrt{1 + \frac{dy^2}{dx^2}} + \frac{dy}{dx} - \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

Lassen wir jetzt Δx bis zu Null convergiren, so werden beide Ausdrücke (zwischen welchen die Derivirte liegt) gleich, und es ist:

$$\frac{ds}{dx} = \sqrt{1 + \frac{dy^2}{dx^2}} \text{ und weil } \frac{dy}{dx} = f'(x):$$

$$ds = \sqrt{1 + (f'x)^2} \cdot dx$$

* Weil ein unendlich kleiner Bogen mit seiner Sehne genau zusammenfällt, *) so hat man aus dem characteristischen Dreieck für das Differential des Bogens unmittelbar (§ 70):

$$ds = \sqrt{dx^2 + dy^2}$$

---

*) Dem § 66 dafür angegebenen Grunde fügen wir hier noch Folgendes hinzu: Denkt man sich eine beliebig gebrochene Linie durch die Bewegung eines Puncts beschrieben, so treten hiebei zweierlei Vorstellungen auf: 1) die rein progressive oder gradlinigte Bewegung und 2) Richtungsänderung. Denken wir uns, statt des beschreibenden geometrischen Puncts, weil, als Negation, ganz objectlos und für sich allein gar nicht vorstellbar, das untheilbare Element einer graden Linie, so kann dieses, der Untheilbarkeit halber, ebenso wenig eine Richtung angeben, als ein sogenannter geometrischer Punct oder eine Kugel. Soll nun dieses Element sich bewegen, so muss es nach dem Gesetze der Stetigkeit zuerst nothwendig rein progressiv in die Stelle eines unmittelbar anliegenden untheilbaren Elements kommen,

Substituirt man hierin das von x abhängige Wachsthumbestreben der Ordinate, $dy = f'x \cdot dx$, so ist:

$$ds = \sqrt{dx^2 + (f'x)^2 \cdot dx^2} = \sqrt{1 + (f'x)^2} \cdot dx$$

$$s = \int_{x_0}^{x} \sqrt{1 + (f'x)^2} \cdot dx$$

Hier finden nun wieder dieselben Schlüsse Statt, wie § 224. Die auf einander folgenden, ihrer verschiedenen Lage halber, aber auch hier keineswegs gleichen Differentiale des Bogens sind nämlich:

$$\sqrt{1+(f'x_0)^2} \cdot dx,\ \sqrt{1+[f'(x_0+dx)]^2} \cdot dx,\ \sqrt{1+[f'(x_0+2dx)]^2} \cdot dx$$

etc.

244.

Aufgabe 2. Die Parabel zu rectificiren, deren Gleichung:

$$y^2 = px$$

Auflösung. Man hat hier $2ydy = pdx$, woraus:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{p}{2y} \text{ und } \frac{dy^2}{dx^2} = \frac{p}{4x}$$

$$s = \int \sqrt{1 + \frac{p}{4x}} \cdot dx$$

Setzt man nach Cauchy $\sqrt{1 + \frac{p}{4x}} = t$, so ist: $x = \frac{\frac{1}{4}p}{t^2 - 1}$ und

$$s = \int t \cdot dx = tx - \int x \cdot dt$$

$$s = tx - \tfrac{1}{4}p \int \frac{dt}{t^2 - 1},$$ also (§ 206, 3):

und wir haben jetzt eine unendlich kleine grade Linie. Bei weiterer Bewegung kann nun das Element seine Richtung bedeutend oder auch wenig ändern (Spitzen, Schnabel, Wendungspuncte etc.). Soll also das untheilbar gedachte Element eine krumme Linie beschreiben, so muss, damit es aus der Stelle kommen kann, die progressive Bewegung der Richtungsänderung nothwendig vorhergehen und wir können, in die Leibnitz'sche Anschauungsweise eingehend, eine krumme Linie unmöglich anders, als ein Vieleck von unendlich vielen unendlich kleinen Seiten definiren.

$$s = tx - \tfrac{1}{8}p \cdot l\left(\frac{t-1}{t+1}\right)$$

$$s = x \cdot \sqrt{1+\frac{p}{4x}} + \tfrac{1}{8}p\,l \left\{ \frac{\sqrt{1+\frac{p}{4x}}+1}{\sqrt{1+\frac{p}{4x}}-1} \right\}$$

Soll das Integral im Scheitel anheben, so ist keine Constante nöthig, indem es für $x = 0$ von selbst verschwindet. Dies folgt aus (§ 80), oder auch aus:

$$s = \sqrt{x^2 + \tfrac{1}{4}px} + \tfrac{1}{8}p \cdot l \frac{\sqrt{4x+p}+\sqrt{4x}}{\sqrt{4x+p}-\sqrt{4x}}$$

$$s = \sqrt{x^2 + \tfrac{1}{4}px} + \tfrac{1}{4}p \cdot l \frac{\sqrt{4x+p}+\sqrt{4x}}{\sqrt{p}}$$

Anmerkung. Man kann auch, wenn es leichtere Rechnung giebt, alles durch y ausdrücken. Aus:

$$y^2 = px \text{ folgt:}$$

$$2y\,dy = p\,dx, \text{ also:}$$

$$\frac{dy^2}{dx^2} = \frac{p^2}{4y^2} \text{ und } dx = \frac{2y}{p} \cdot dy$$

$$s = \frac{1}{p}\int \sqrt{p^2 + 4y^2} \cdot dy$$

Setze $\sqrt{p^2 + 4y^2} = 2ty$, so ist $y^2 = \dfrac{\frac{1}{4}p^2}{t^2 - 1}$ und

$$s = \frac{y}{2p}\sqrt{p^2 + 4y^2} + \tfrac{1}{4}p \cdot l\left(\frac{2y + \sqrt{p^2 + 4y^2}}{p}\right)$$

wobei keine Constante nöthig ist, wenn das Integral im Scheitel ($y = 0$) anheben soll.

245 a.

Aufgabe 3. Die Cycloide zu rectificiren.

Auflösung. Die Gleichungen dieser Linie sind (§ 156):

$$\begin{aligned} x &= r\theta - r\sin\theta \\ y &= r - r\cos\theta \end{aligned} \quad \text{also:} \quad \begin{aligned} dx &= r(1-\cos\theta)\,d\theta \\ dy &= r\sin\theta\,d\theta \end{aligned}$$

$$dx^2 + dy^2 = 2r^2(1-\cos\theta) \cdot d\theta^2$$

$$ds^2 = 4r^2 \sin^2 \tfrac{1}{2}\theta \cdot d\theta^2, \text{ mithin:}$$

$$s = 2r\int \sin\tfrac{1}{2}\theta\cdot d\theta = -4r\cos\tfrac{1}{2}\theta + c$$

Soll das Integral für $\theta = 0$ verschwinden (anheben), so muss $c = 4r$ sein, daher:

$$s = 4r(1 - \cos\tfrac{1}{2}\theta) = 8r\sin^2\tfrac{1}{4}\theta$$

Setzt man $\theta = 2\pi$, so ist die Länge der ganzen Cycloide $= 8r$.

245 b.

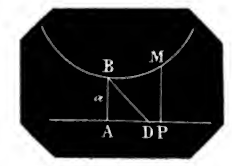
Aufgabe. Die Hypocycloide zu rectificiren, deren Gleichung (s. Fig. § 232):

$$y = (a^{\frac{2}{3}} - x^{\frac{2}{3}})^{\frac{3}{2}}$$

Auflösung. Man setze $x = a\sin^3\theta$, so ist $y = a\cos^3\theta$ und $ds = \frac{3}{2}a\sin 2\theta d\theta$. Mithin für alle vier Quadranten.

$$s = 6a\cdot\int_0^{\frac{1}{2}\pi}\sin 2\theta\cdot d\theta = 6a.$$

246.



Aufgabe 4. Die Kettenlinie zu rectificiren. Ihre Gleichung ist:

$$y = a\cdot\frac{e^{\frac{x}{a}} + e^{-\frac{x}{a}}}{2}$$

Auflösung. Man hat hier:

$$ds = \sqrt{\left\{1 + \frac{\left(e^{\frac{x}{a}} - e^{-\frac{x}{a}}\right)^2}{4}\right\}}\cdot dx$$

$$s = \int_0^x \frac{e^{\frac{x}{a}} + e^{-\frac{x}{a}}}{2}\cdot dx$$

$$s = a\cdot\frac{e^{\frac{x}{a}} - e^{-\frac{x}{a}}}{2} = \sqrt{y^2 - a^2}$$

Die Länge eines Bogens, BM, dieser Linie lässt sich also genau durch eine grade Linie darstellen (rectificiren). Steckt man

nämlich die End-Ordinate $MP = y$, als Hypotenuse, von B nach D ab, so ist $AD = \sqrt{y^2 - a^2} = \widehat{BM}$. Denn:

$$y^2 = \frac{a^2}{4}\left(e^{\frac{2x}{a}} + 2 + e^{-\frac{2x}{a}}\right)$$

$$y^2 - a^2 = \frac{a^2}{4}\left(e^{\frac{2x}{a}} + 2 + e^{-\frac{2x}{a}}\right) - \frac{4a^2}{4} = \frac{a^2}{4}\left(e^{\frac{x}{a}} - e^{-\frac{x}{a}}\right)^2$$

$$\sqrt{y^2 - a^2} = \frac{a}{2}\left(e^{\frac{x}{a}} - e^{-\frac{x}{a}}\right)$$

247.

Aufgabe 5. Die logarithmische Linie zu rectificiren. Ihre Gleichung ist:

$$y = a \cdot lx$$

Auflösung. Hier ist:

$$s = \int \sqrt{\left(1 + \frac{a^2}{x^2}\right)} \cdot dx$$

Man setze $\sqrt{1 + \frac{a^2}{x^2}} = z$, so ist $x = \frac{a}{\sqrt{z^2 - 1}}$

$$s = zx - a\int \frac{dz}{\sqrt{z^2 - 1}} \text{ und (§ 207, 1)}$$

$$s = \sqrt{a^2 + x^2} - a\,l\left(\frac{a + \sqrt{a^2 + x^2}}{x}\right) + c$$

Soll das Integral von $x = 0$ anheben, so ist die hinzuzufügende Constante $c = \infty$.

248.

Aufgabe 6. Es ist eine krumme Linie durch Polar-Coordinaten gegeben, nämlich allgemein:

$$r = f(\theta)$$

Man sucht eine allgemeine Formel, nach welcher man die Länge eines bestimmten Bogens berechnen kann. (Fig. § 236.)

Auflösung. Das Differential des Bogens $M_0M = s$ ist hier offenbar: $ds = \sqrt{dr^2 + r^2 d\theta^2}$, daher:

$$s = \int \sqrt{r^2 d\theta^2 + dr^2} = \int \sqrt{r^2 + \frac{dr^2}{d\theta^2}} \cdot d\theta$$

249.

Aufgabe 7. Die Archimedische Spirale zu rectificiren, deren Gleichung:

$$r = \frac{a}{2\pi}\,\theta$$

Auflösung. Hier ist $\frac{dr}{d\theta} = \frac{a}{2\pi}$, mithin:

$$s = \frac{a}{2\pi}\int\sqrt{1+\theta^2}\cdot d\theta$$

Setze $\sqrt{1+\theta^2} = t\theta$, so ist $\theta^2 = \frac{1}{t^2-1}$ und

$$\frac{2\pi}{a}\cdot s = t\cdot\frac{\theta^2}{2} - \tfrac{1}{2}\int\frac{dt}{t^2-1}$$

$$\frac{2\pi}{a}\cdot s = \tfrac{1}{2}\theta\sqrt{1+\theta^2} + \tfrac{1}{4}l\left(\frac{\sqrt{1+\theta^2}+\theta}{\sqrt{1+\theta^2}-\theta}\right)$$

$$s = \frac{a}{4\pi}\left[\theta\sqrt{1+\theta^2} + l\,(\theta + \sqrt{1+\theta^2})\right]$$

250.

Aufgabe 8. Die Exponentialspirale zu rectificiren:

$$r = e^{\theta}$$

Auflösung. Man hat hier $\frac{dr}{d\theta} = e^{\theta}$, daher:

$$s = \sqrt{2}\cdot\int e^{\theta}\,d\theta$$

$$s = e^{\theta}\sqrt{2} + c = r\sqrt{2} + c'$$

Nehmen wir dies Integral von $\theta = -\infty$ bis $\theta = 0$, oder von $r = 0$ bis $r = 1$, so findet man für die Länge aller unzähligen sich immer näher um den Pol lagernden Windungen, eine endliche Grösse $= \sqrt{2}$.

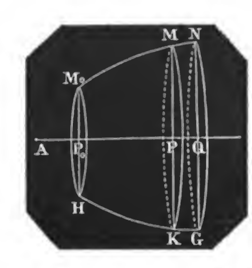
Siebzehntes Buch.

Cubatur der Revolutionskörper.

251.

Aufgabe 1. Es sei allgemein:

$$y = f(x)$$



die Gleichung einer krummen Linie. Es wird eine allgemeine Formel gesucht, nach welcher man das Volumen des Körpers berechnen kann, welcher durch eine ganze Umdrehung der bei P_0, P rechtwinkligen Figur M_0P_0PM um P_0P als Achse beschrieben wird. Es sei $AP_0 = x_0$, $AP = x$.

Auflösung. Um zuerst das Differential des Volumens V zu finden, lassen wir $AP = x$ um $PQ = \Delta x$ wachsen, alsdann wächst das Volumen um das cylinderförmige Stück $MG = \Delta V$ und es ist näherungsweise, indem wir durch $y + \varepsilon$ eine mittlere Ordinate zwischen $MP = y$ und $NQ = y + \Delta y$ bezeichnen:

$$\Delta V = (y + \varepsilon)^2 \pi \cdot \Delta x$$

$$\frac{\Delta V}{\Delta x} = (y + \varepsilon)^2 \pi.$$

Lassen wir nun, um auf die Derivirte zu kommen, Δx bis zu Null abnehmen, so verschwindet gleichzeitig auch ε und wir haben:

$$\frac{dV}{dx} = y^2 \pi = [f(x)]^2 \cdot \pi$$

$$dV = \pi y^2 dx = \pi [f(x)]^2 dx$$

$$V = \pi \int_{x_0}^{x} y^2 dx = \pi \int_{x_0}^{x} [f(x)]^2 dx$$

* Nach der Infinitesimalmethode ist für ein unendlich kleines $PQ = dx$, der Bogen MN grade und das unendlich kleine Stück MG des Körpers ein abgekürzter Kegel, dessen Inhalt $= \frac{\pi \cdot dx}{3}[y^2 + y(y+dy) + (y+dy)^2]$ oder weil in $\frac{\pi \cdot dx}{3}(3y^2 + 3ydy + dy^2)$, $3ydy + dy^2$ gegen $3y^2$ wegfallen müssen, das gesuchte allgemeine Differential:

$$dV = \pi y^2 dx = \pi \cdot (f(x))^2 \cdot dx$$

252.

Aufgabe 2. Das Paraboloid zu berechnen, welches entsteht, indem sich ein Parabelbogen, AM, um die Achse $AP = x$ dreht. Die Gleichung sei:

$$y^2 = px$$

Auflösung. Nach dem Vorhergehenden ist:

$$V = \pi \int_0^x px \cdot dx = \frac{\pi}{2} px^2 = \frac{x}{2} \cdot y^2 \pi$$

Das Paraboloid ist also just halb so gross, als ein Cylinder, dessen Höhe $AP = x$ und dessen Radius $MP = y$ ist.

253.

Aufgabe 3. Eine Ellipse dreht sich um ihre grosse Achse, man soll das dadurch beschriebene längliche Ellipsoid berechnen:

$$a^2y^2 + b^2x^2 = a^2b^2$$

Auflösung. Man hat hier:

$$V = \frac{b^2}{a^2}\pi \int_{-a}^{+a} (a^2 - x^2)\, dx = \tfrac{4}{3} ab^2 \pi$$

Will man das abgeplattete Ellipsoid haben, welches durch Rotation um die kleine Achse entsteht, so ist:

$$V = \frac{a^2}{b^2}\pi \int_{-b}^{+b} (b^2 - y^2)\, dy = \tfrac{4}{3} a^2 b \pi$$

254.

Aufgabe 4. Den Körper zu berechnen, der durch Umdrehung der Cycloide um ihre Achse entsteht. Ihre Gleichungen sind (§ 156):

$$x = r\theta - r\sin\theta$$
$$y = r(1 - \cos\theta).$$

Auflösung. Hier ist: $dx = r(1 - \cos\theta)\,d\theta$, mithin:

$$V = r^3\pi\int(1 - \cos\theta)^3 d\theta = 8r^3\pi\int\sin^6\tfrac{1}{2}\theta\cdot d\theta$$

$$V = r^3\pi\int(-\tfrac{1}{4}\cos 3\theta + \tfrac{6}{4}\cos 2\theta - \tfrac{15}{4}\cos\theta + \tfrac{10}{4})\,d\theta$$

$$V = r^3\pi(-\tfrac{1}{12}\sin 3\theta + \tfrac{3}{4}\sin 2\theta - \tfrac{15}{4}\sin\theta + \tfrac{5}{2}\theta).$$

Soll das Integral von $\theta = 0$ anheben, so ist keine Constante erforderlich, soll es dann bis $\theta = 2\pi$ genommen werden, so hat man für den ganzen Körper (Amkg. § 232):

$$V = 5r^3\pi^2.$$

255.

Aufgabe 5. Den Körper zu berechnen, der durch Umdrehung der logarithmischen Linie entsteht:

$$y = a\cdot lx.$$

Auflösung. Man hat hier:

$$V = a^2\pi\int_0^x(lx)^2 dx \text{ und (§ 202):}$$

$$V = a^2\pi x[(lx)^2 - 2lx + 2]$$

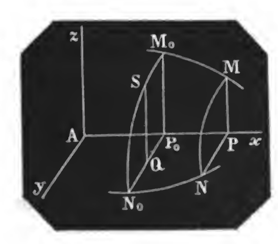
Nimmt man $x = 1$, so ist das Volumen des beschriebenen Körpers, obgleich von unendlicher Ausdehnung, doch nur $= 2a^2\pi$.

256.

* Um schliesslich noch eine allgemeine Formel anzugeben, nach welcher man auch solche Körper berechnen kann, welche nicht durch Rotation entstanden sind, für deren Oberfläche aber eine Gleichung:

$$z = F(x, y)$$

gegeben ist, und wo x, y absolut, z aber die abhängig veränderliche Grösse ist, überlege man Folgendes:



Es sei $AP_0 = x_0$ und durch P_0 parallel mit der Ebene der yz eine Ebene gelegt, so lässt sich der Flächen-Inhalt des Durchschnitts $M_0N_0P_0$ finden. Setzt man nämlich in der Gleichung für die Oberfläche des Körpers:

$$z = F(x_0, y) \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (1)$$

in welcher nun x_0 constant bleibt, für y alle möglichen Werthe, welche die Gleichung (1) zu nehmen gestattet, so ist diese Gleichung nichts anderes als die Gleichung der krummen Linie M_0N_0, in welcher die mit yAz parallele Ebene die Oberfläche des fraglichen Körpers schneidet. P_0N_0 ist hier gleichsam die Abscissenachse.

Setzt man in (1) $y=0$, so erhält man die Ordinate $z=F(x_0,0)=M_0P_0$; setzt man $y=P_0Q$, so wird die Ordinate $z=F(x_0,P_0Q)=SQ$ u.s.w. Der Inhalt dieser Durchschnittsfläche ist also $=\int_0^y F(x_0,y)dy$ und wo das Integral innerhalb der Grenzen 0 und y oder auch von $y_0=P_0Q$ bis $y=P_0Q_1$ genommen werden kann.

Für diese äusserste Grenze von y können nun aber zwei Fälle Statt finden. Sie kann nämlich erstens durch die Natur der Gleichung (1) bestimmt, d. h. eine Function von dem jedesmaligen x sein, oder man kann zweitens eine beliebige Function, $y=\varphi(x)$ annehmen.

Ist nun $AP=x$ und denkt man sich das Intervall $x-x_0$ in n gleiche Theile getheilt, setzt $\frac{x-x_0}{n}=\Delta x$, so sind die von x_0 bis x auf einander folgenden Durchschnittsflächen offenbar:

$$\int_{y_0}^y F(x_0,y)dy;\ \int_{y_0}^y F(x_0+\Delta x,y)dy;\cdots\ \int_{y_0}^y F(x_0+(n-1)\Delta x,y)dy,$$

wo aber, wie gesagt, die Grenzen dieser Integrale keineswegs dieselben sind.

Die Summe aller zwischen diesen Durchschnittsflächen liegenden Stücke des Körpers von x_0 bis x, welche man als Prismata von der Höhe Δx betrachten kann, ist näherungsweise:

$$\left\{\int F(x_0,y)dy+\int F(x_0+\Delta x,y)\,dy+\cdots+\int F(x_0+(n-1)\,\Delta x,y)\,dy\right\}\Delta x$$

Denkt man Δx unendlich klein $=dx$, so ist das Volumen des Körpers von x_0 bis x ganz genau:

$$V=\int_{x_0}^x\left(\int_{y_0}^y F(x,y)dy\right)\cdot dx$$

oder wie man zu schreiben pflegt:

$$V = \int_{x_0}^{x}\int_{y_0}^{y} F(x, y)\,dx dy = \int_{x_0}^{x} dx \cdot \int_{y_0}^{y} F(x, y)\,dy.$$

257.

* Man integrirt also erst in Bezug auf y innerhalb der bestimmten Grenzen, indem man x als constant betrachtet. Multiplicirt man das gefundene Integral mit dx, und integrirt auf's Neue in Bezug auf x innerhalb der bestimmten Grenzen, so hat man das bestimmte Doppelintegral. *)

Anmerkung. Kann man für jedes $x = x_0$, $x_0 + \Delta x$, $x_0 + 2\Delta x$ etc. das y immer innerhalb derselben Grenzen y_0, y_1 nehmen, so bildet das berechnete Volumen einen prismenartigen Körper, der oben von einer krummen, seitwärts aber von vier ebenen Flächen begrenzt und dessen in der Ebene der xy liegende Grundfläche ein Rechteck (die Projection von der obern krummen Fläche) ist, dessen Länge $= x - x_0$ und dessen Höhe $y_1 - y_0$.

Kann man aber zu jedem x, das y nicht innerhalb derselben Grenzen nehmen, was z. B. nicht möglich ist, wenn auch die den Körper begrenzende Seitenfläche krumm wäre, weil dann auch die in der Ebene der x, y liegende Grundfläche kein Rechteck, sondern ganz oder theilweise von einer krummen Linie begrenzt ist; alsdann sind zwar die Grössen x, y noch immer unabhängig veränderlich, jedoch die Grenzwerthe der einen von denen der andern abhängig. Dieser die Integration oft sehr erschwerende Umstand muss bei der Bestimmung des Doppelintegrals wohl beachtet werden, wie schon folgendes Beispiel zeigt.

258.

* Beispiel. Es sei die Gleichung für die Oberfläche des Körpers:

$$z = \sqrt{r^2 - x^2 - y^2} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (1)$$

so hat man hier:

$$V = \iint z\,dx dy = \int dx \cdot \int \sqrt{r^2 - x^2 - y^2} \cdot dy.$$

*) Wenn $F(x, y)$ für beide Grenzen stetig ist und kein Zeichenwechsel Statt findet, so kann man offenbar auch die Integrations-Ordnung umkehren, d. h. erst in Bezug auf x und dann in Bezug auf y integriren.

Sieht man nun erst x als constant an und setzt Kürze halber $r^2 - x^2 = \varrho^2$, so ist (§ 226):

$$V = \int dx \left\{ \tfrac{1}{2} y \sqrt{\varrho^2 - y^2} + \tfrac{1}{2}\varrho^2 \arcsin \frac{y}{\varrho} \right\}$$

Man sieht aus der gegebenen Gleichung (1), dass für y kein grösserer Werth gesetzt werden darf als $\varrho = \sqrt{r^2 - x^2}$, weil sonst z imaginair würde. Ist also $AP = x$, so kann man das erstere Integral nur nehmen von $y = 0$ bis $y = \varrho = \sqrt{r^2 - x^2} = PN$ und hat dann die Fläche des mit der Ebene der yz parallelen Schnittes MNP.

Für $y = 0$ verschwindet das Integral und für $y = \varrho$ hat man die Fläche des Durchschnitts $= \frac{1}{2}\varrho^2 \cdot \frac{\pi}{2}$, mithin ist, für ϱ seinen Werth zurückgesetzt:

$$V = \int dx \cdot \tfrac{1}{2}(r^2 - x^2)\frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{4}\int (r^2 - x^2) dx$$

$$V = \tfrac{1}{4}\pi\left(r^2 x - \frac{x^3}{3}\right).$$

Lässt man dieses Integral von $x = 0$ anheben und nimmt es bis $x = r$, und weiter kann es sich wegen Gleichung (1) nicht erstrecken, so ist:

$$V = \tfrac{1}{6} r^3 \pi.$$

Wir haben von dem ganzen Körper, dessen Oberfläche durch die Gleichung (1) gegeben, nur den Theil gefunden, welcher in dem einen der acht dreiflächigen Coordinatenwinkel liegt. Aus dem doppelten Vorzeichen der Ausdrücke für z und ϱ ersieht man aber leicht, dass die Theile des Körpers in den übrigen sieben Winkeln dieselbe Grösse haben. Es ist daher mit Rücksicht auf die negativen Coordinaten:

$$V = \tfrac{4}{3} r^3 \pi.$$

Man hätte auch, um gleich die obere Hälfte des Körpers zu finden, erst von $y = -\varrho$ bis $y = +\varrho$ und dann von $x = -r$ bis $x = +r$ integriren können. In Zeichen:

$$V = \int_{-r}^{+r} dx \cdot \int_{-\sqrt{r^2 - x^2}}^{+\sqrt{r^2 - x^2}} \sqrt{(r^2 - x^2) - y^2} \cdot dy$$

259.

* Aufgabe. Es ist die Gleichung eines Paraboloids gegeben (höhere Geometrie § 136):

$$z = \frac{x^2 + y^2}{p}$$

und in der Ebene der xy aus dem Anfangspunct A mit einem Radius, ϱ, ein Kreis beschrieben. In der Peripherie denke man sich eine auf der Ebene der xy senkrechte Cylinderfläche errichtet und bis an die Fläche des Paraboloids gehend.

Man sucht das Volumen, welches von beiden Flächen und von der Basis (Kreis) eingeschlossen wird.

Auflösung. Man hat hier:

$$V = \frac{1}{p}\int_0^x dx \cdot \int_{y=0}^{\sqrt{\varrho^2 - x^2}} (x^2 + y^2) dy$$

$$V = \frac{1}{p}\int_0^x dx \cdot \left(x^2 + \frac{y^2}{3}\right) y.$$

Für $y = 0$ wird das erste Integral Null und für $y = \sqrt{\varrho^2 - x^2}$ ist:

$$V = \frac{1}{3p}\int_0^\varrho (\varrho^2 + 2x^2) \cdot \sqrt{\varrho^2 - x^2} \cdot dx$$

$$3pV = \int_0^\varrho \left\{\varrho^2 \sqrt{\varrho^2 - x^2} \cdot dx + 2x^2 \sqrt{\varrho^2 - x^2} . dx\right\}$$

Setzt man $x = \varrho \sin\varphi$, mithin: $dx = \varrho \cos\varphi \cdot d\varphi$ und die entsprechenden neuen Grenzen $\varphi = 0$ und $\varphi = \frac{1}{2}\pi$, so ist, mit Rücksicht auf die Bemerkung § 232:

$$\varrho^2 \int_0^\varrho \sqrt{\varrho^2 - x^2} \cdot dx = \varrho^4 \int_0^{\frac{1}{2}\pi} \cos^2 \varphi d\varphi = \varrho^4 \cdot \frac{\pi}{4}.$$

$$2\int_0^\varrho x^2 \sqrt{\varrho^2 - x^2} \cdot dx = 2\varrho^4 \int_0^{\frac{1}{2}\pi} (\sin^2\varphi - \sin^4\varphi) d\varphi = \tfrac{1}{4}\varrho^4 \cdot \frac{\pi}{2}$$

Es ist mithin $V = \frac{1}{8p}\varrho^4\pi$, oder für alle vier Quadranten:

$$V = \frac{1}{2p} \cdot \varrho^2 \pi.$$

Anmerkung. Die auf der Ebene der xy, nach dem darin um A als Leitlinie beschriebenen Kreise gekrümmte senkrechte Cylinderfläche des fraglichen Körpers schneidet hier die andere Seitenfläche, welche zugleich auch Seitenfläche des Paraboloids ist, in einem gleichen und parallelen Kreise (was bei einer andern Leitlinie (Ellipse, Parabel etc.) oder andern Oberfläche nicht der Fall wäre). Da nun, wegen der vorgeschriebenen Leitlinie, immer $x^2 + y^2 = \varrho^2$ sein muss, so ist die Höhe unserer Cylinderfläche $z = \frac{x^2+y^2}{p} = \frac{\varrho^2}{p}$, mithin das Volumen dieses Cylinders $= \frac{\varrho^2}{p} \cdot \varrho^2 \pi$. Zieht man hiervon den oben gefundenen, das Paraboloid umgebenden Körper ab, so findet man hier auf anderem Wege wieder das Volumen des Paraboloids $= \frac{1}{2p} \varrho^4 \pi$, nämlich halb so gross als der Cylinder.

260.

* Aufgabe. Das Volumen des Ellipsoids mit drei Achsen zu finden. Die Gleichung ist (höhere Geometrie § 138):

$$z = c\sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}}$$

Auflösung. Man hat hier:

$$V = 8c\int_0^a dx \int_0^{b\sqrt{\left(1-\frac{x^2}{a^2}\right)}} \sqrt{\left(1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}\right)} dy$$

$$V = 8c\int_0^a dx \cdot \int_0^{b\varrho} \sqrt{\varrho^2 - \frac{y^2}{b^2}} \cdot dy$$

Setze $\frac{y}{b} = \varrho \sin\varphi$, mithin $dy = b\varrho\cos\varphi \cdot d\varphi$, so ist (§ 226, 2):

$$\int_0^{b\varrho} \sqrt{\varrho^2 - \frac{y^2}{b^2}} \cdot dy = b\varrho^2 \int_0^{\frac{1}{2}\pi} \cos^2\varphi d\varphi = b\varrho^2\left(\frac{\sin 2\varphi}{4} + \tfrac{1}{2}\varphi\right) = b\varrho^2 \cdot \tfrac{1}{4}\pi$$

$$V = 2bc\pi \int_0^a \left(1 - \frac{x^2}{a^2}\right) dx$$

$$V = \tfrac{4}{3} abc\pi.$$

261.

* Die Infinitesimalmethode betrachtet die Körper als Summe unendlich kleiner Prismen (Elemente), deren Grundfläche Rechtecke $= dx \cdot dy$, deren Höhe $= dz$, deren Inhalt also $= dx \cdot dy \cdot dz$. Das Volumen des Körpers ist dann ausgedrückt durch das dreifache Integral:

$$V = \int\int\int dxdydz$$

welches nun andeutet, dass die unendlich kleinen Parallelepipeden nach den drei Richtungen der Coordinaten-Achsen summirt werden müssen. Integrirt man erst in Bezug auf z, so ist:

$$V = \int\int zdxdy$$

und hier bedeutet nun $zdxdy$ eine aus Parallepipeden bestehende Säule, deren Grundfläche das unendlich kleine Rechteck $dx \cdot dy$ und dessen Höhe z ist. Ist die Grenze von z eine Function von x, y [$z = F(x, y)$], so muss diese jetzt statt z substituirt werden, alsdann ist:

$$V = \int_{x_0}^{x}\int_{y_0}^{y} F(x, y)\,dxdy$$

Integrirt man jetzt in Bezug auf y von $y = y_0$ bis $y = y_1$, so erhält man als Summe solcher Säulen eine Schichte, deren Breite $= y_1 - y_0$, deren Dicke $= dx$ und die mit der Ebene des yz parallel läuft. Integrirt man drittens in Bezug auf x, so erhält man alle Schichten von $x = x_0$ bis $x = x_{,}$.

262.

* Das Differential für das Volumen eines Körpers wird manchmal auch in Polar-Coordinaten ausgedrückt, indem es hier sowohl, als bei der Summirung der Flächenelemente gleichgültig ist, welche Form diese Elemente haben. Die hier verlangte allgemeine Formel findet man am leichtesten direct. Es sei nämlich $AM = r$ der vom Pol A bis zu einem Punct, M, des Körpers gehende Radius vector, φ der Winkel, den er mit der Ebene der xy macht und ψ der Winkel, den seine Projection AQ mit der Achse Ax bildet; denkt man sich von M ein Perpendikel MR auf die Achse AZ gefällt, so ist $MR = AQ = r\cos\varphi$. Denkt man mit RM aus R den unendlich kleinen Bogen Mm parallel mit der Ebene der xy beschrieben, so ist $Mm = r\cos\varphi d\psi$. Beschreibt

man ferner mit $AM = r$ aus A und in der auf xy senkrechten Ebene MAQ, den unendlich kleinen Bogen Mn, so ist $Mn = r \cdot d\varphi$. Denkt man sich aus diesen Elementen die rechteckförmige Fläche $MNnm$ construirt (deren Inhalt $= r^2 \cos\varphi d\varphi d\psi$) und diese wiederum als Grundfläche eines Prismas von der unendlich kleinen Höhe $= dr$, so hat man das Differential des Körpers $dV = r^2 \cos\varphi \cdot d\varphi \cdot d\psi \cdot dr$ (welches also ein Stück von einer Kugelschale ist), und für das gesuchte Volumen:

$$V = \int\int\int r^2 \cos\varphi d\varphi d\psi dr$$

Man integrirt nun erst in Bezug auf r, ist dann r eine Function von φ und ψ, so muss man diese Function statt r setzen und dann in Bezug auf ψ und φ integriren, was in der Regel immer auf grosse Weitläufigkeiten führt. Wollte man z. B. nach obiger Formel das Volumen einer Kugel berechnen, deren Radius $= a$ ist, so hat man:

$$V = \int\int \cos\varphi d\varphi d\psi \int_0^a r^2 dr$$

$$V = \frac{a^3}{3} \int \cos\varphi d\varphi \cdot \int d\psi$$

Das erste Integral giebt uns die Summe aller, in der Richtung des Radius, vom Mittelpunct bis zur Oberfläche, auf einander folgenden Differentiale (Elemente), welche zusammen einen pyramidenartigen Körper bilden, deren Höhe $= a$ und deren Grundfläche $= a \cos\varphi d\varphi \cdot a d\psi$. Es ist nämlich:

$$V = \int\int \frac{a}{3} \cdot a^2 \cos\varphi d\varphi \cdot d\psi$$

Integriren wir jetzt in Bezug auf ψ, und zwar von $\psi = 0$ bis $\psi = \frac{1}{2}\pi$, so erhalten wir einen Körper, dessen Basis eine Zone von der Breite $a \cos\varphi d\varphi$ ist, nämlich:

$$V = \int \frac{a}{3} \cdot a \frac{\pi}{2} \cdot a \cos\varphi d\varphi$$

Integriren wir jetzt von $\varphi = 0$ bis $\varphi = \frac{1}{2}\pi$, so haben wir den achten Theil der Kugel, nämlich:

$$V = \frac{a^3}{6} \pi.$$

Achtzehntes Buch.

Complanation der Revolutionskörper.

263.

Aufgabe. Es sei allgemein:

$$y = f(x)$$

die Gleichung einer krummen Linie, welche sich um die Achse Ax ganz herum dreht (s. Figur § 251). Es wird eine allgemeine Formel gesucht, nach welcher man die Fläche z berechnen kann, welche ein Bogen, M_0M, beschreibt, dessen Endpuncts-Abscissen $AP_0 = x_0$, $AP = x$ gegeben sind.

Auflösung. Um das Differential der Fläche zu finden, lassen wir die Abscisse $AP = x$ um $PQ = \Delta x$ fliessen, dann ist die Sehne $MN = \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2} = \sqrt{1 + \frac{\Delta y^2}{\Delta x^2}} \cdot \Delta x$ und die Fläche des abgekürzten Kegels, welche diese Sehne beschreibt:

$$(y + y \pm \Delta y)\pi \cdot \sqrt{1 + \frac{\Delta y^2}{\Delta x^2}} \cdot \Delta x \text{ *)}$$

mithin, weil

$$\Delta y = f'(x)\Delta x + f''(x) \cdot \frac{\Delta x^2}{1 \cdot 2} + \cdots = \left[f'(x) + f''(x) \cdot \frac{\Delta x}{1 \cdot 2} + \cdots\right]\Delta x = \varepsilon \Delta x$$

für das Wachsthum der Fläche z näherungsweise:

---

*) Wir setzen $\pm \Delta y$, je nachdem $NQ \gtrless MP$.

$$\Delta z = 2y\pi \cdot \sqrt{1+\frac{\Delta y^2}{\Delta x^2}} \cdot \Delta x \pm \varepsilon \Delta x^2 \cdot \sqrt{1+\frac{\Delta y^2}{\Delta x^2}}$$

$$\frac{\Delta z}{\Delta x} = 2y\pi \cdot \sqrt{1+\frac{\Delta y^2}{\Delta x^2}} \pm \varepsilon \Delta x \cdot \sqrt{1+\frac{\Delta y^2}{\Delta x^2}}$$

Lässt man nun, um auf die Derivirte und dadurch auf das Differential zu kommen, Δx bis zu Null convergiren, so fallen Sehne und Bogen zusammen und man hat:

$$\frac{dz}{dx} = 2y\pi\sqrt{1+\frac{dy^2}{dx^2}}$$

$$dz = 2y\pi \cdot \sqrt{1+\frac{dy^2}{dx^2}} \cdot dx$$

$$z = 2\pi \int_{x_0}^{x} f(x) \cdot \sqrt{1+\frac{dy^2}{dx^2}} \cdot dx$$

* **Anmerkung.** Nach der Infinitesimalmethode gelangt man viel schneller zum Differential. In dem characteristischen Dreieck ist die mit dem Bogen zusammenfallende Sehne $ds = \sqrt{dx^2 + dy^2} = \sqrt{1+\frac{dy^2}{dx^2}} \cdot dx$, mithin die beschriebene Kegelfläche $= (2y \pm dy)\pi \cdot ds = 2y\pi ds \pm dy \cdot ds \cdot \pi$, oder weil eine unendlich kleine Grösse zweiter Ordnung, $dy \cdot ds$, gegen die erster Ordnung verschwindet, ganz einfach:

$$dz = 2y\pi \cdot ds = 2\pi f(x) \cdot \sqrt{1+\frac{dy^2}{dx^2}} \cdot dx$$

$$z = 2\pi \int y ds = 2\pi \int f(x) \cdot \sqrt{1+\frac{dy^2}{dx^2}} \cdot dx$$

264.

Aufgabe. Ein Parabelbogen, AM, dreht sich um die Achse Ax; man soll die krumme Oberfläche des beschriebenen Paraboloids finden.

Auflösung. Aus der Gleichung der Parabel $y = \sqrt{px}$ folgt: $\sqrt{1+\frac{dy^2}{dx^2}} = \frac{1}{2}\frac{\sqrt{p^2+4px}}{\sqrt{px}}$, mithin:

$$z = \pi\sqrt{p}\int (4x+p)^{\frac{1}{2}} dx$$

$$z = \frac{\pi\sqrt{p}}{6} \cdot (4x+p)^{\frac{3}{2}} + c$$

Soll das Integral im Scheitel anheben, also für $x = 0$ auch $z = 0$ sein, so hat man:

$$0 = \frac{\pi}{6} p^2 + c, \text{ mithin:}$$

$$z = \frac{\pi}{6} \left[(4x + p)^{\frac{3}{2}} \cdot \sqrt{p} - p^2\right]$$

265 a.

Aufgabe. Die Oberfläche zu finden, welche eine Ellipse beschreibt, indem sie sich um ihre grosse Achse dreht. Ihre Gleichung ist:

$$y = \frac{b}{a} \sqrt{a^2 - x^2}$$

Auflösung. Man hat hier zuerst:

$$\sqrt{1 + \frac{dy^2}{dx^2}} = \frac{\sqrt{a^4 - (a^2 - b^2) x^2}}{a \sqrt{a^2 - x^2}}, \text{ daher:}$$

$$z = \frac{2\pi b}{a^2} \int \sqrt{a^4 - (a^2 - b^2) x^2} \cdot dx$$

$$z = \frac{2\pi b}{a^2} \int \sqrt{a^4 - e^2 x^2} \cdot dx$$

$$z = \frac{2\pi b}{a^2} \cdot e \int \sqrt{\frac{a^4}{e^2} - x^2} \cdot dx$$

Setzt man $\frac{a^4}{e^2} = \alpha^2$, so ist (§ 226, 2):

$$z = \frac{2\pi b e}{a^2} \left(\tfrac{1}{2} x \sqrt{\alpha^2 - x^2} + \tfrac{1}{2} \alpha^2 \arcsin \frac{x}{\alpha} \right) + c$$

$$z = \frac{\pi b \sqrt{a^2 - b^2}}{a^2} \left(x \sqrt{\frac{a^4}{a^2 - b^2} - x^2} + \frac{a^4}{a^2 - b^2} \arcsin \frac{x \sqrt{a^2 - b^2}}{a^2} \right) + c$$

$$z = \frac{b \pi x}{a^2} \sqrt{a^4 - (a^2 - b^2) x^2} + \frac{a^2 b \pi}{\sqrt{a^2 - b^2}} \arcsin \frac{x \sqrt{a^2 - b^2}}{a^2} + c$$

Soll die Fläche für $x = 0$ anheben, so ist keine Constante nöthig. Für $x = a$ hat man die halbe Oberfläche des Ellipsoids. Die ganze ist mithin:

$$z = 2 b^2 \pi + \frac{2 a^2 b \pi}{\sqrt{a^2 - b^2}} \cdot \arcsin \frac{\sqrt{a^2 - b^2}}{a}$$

Wird $b = a$, so findet man (§ 80), dass:

$$\frac{\text{arc sin } \frac{\sqrt{a^2-b^2}}{a}}{\sqrt{a^2-b^2}} = \frac{0}{0} = \frac{1}{a}$$

und folglich $z = 4a^2\pi$ ist.

Anmerkung. Rotirt die Ellipse statt um ihre grosse, um ihre kleine Achse, und solche kommen in der Praxis eigentlich nur vor, so ist:

$$x = \frac{a}{b}\sqrt{b^2-y^2}$$

$$z = \frac{2a\pi}{b^2}\int\sqrt{b^4+(a^2-b^2)y^2}\cdot dy$$

$$z = \frac{2a\pi}{b^2}\cdot\sqrt{a^2-b^2}\int\sqrt{\frac{b^4}{a^2-b^2}+y^2}\cdot dy$$

Setze $\frac{b^4}{a^2-b^2} = m^2$ und $\sqrt{m^2+y^2} = ty$ etc., so ist (§ 227):

$$z = \frac{a\pi y}{b^2}\sqrt{b^4+(a^2-b^2)y^2} + \frac{ab^2\pi}{\sqrt{a^2-b^2}}\cdot l\left(\frac{y\cdot\sqrt{a^2-b^2}+\sqrt{b^4+(a^2-b^2)y^2}}{b^2}\right).$$

Soll das Integral für $y = 0$ anheben, so ist keine Constante nöthig. Nimmt man das Integral von $y = 0$ bis $y = b$ und verdoppelt es, so hat man für die Oberfläche des ganzen abgeplatteten Ellipsoids:

$$z = 2a^2\pi + \frac{2ab^2\pi}{\sqrt{a^2-b^2}}\cdot l\left(\frac{a+\sqrt{a^2-b^2}}{b}\right)$$

Um den Werth dieses Integrals für den Fall zu finden, wo $b = a$ wird, bemerke man, dass (§ 80) für $b = a$ der Bruch:

$$\frac{l\left(\frac{a+\sqrt{a^2-b^2}}{b}\right)}{\sqrt{a^2-b^2}} = \frac{0}{0} = \frac{a^2+a\sqrt{a^2-b^2}}{ab^2+b^2\cdot\sqrt{a^2-b^2}} = \frac{1}{a}$$

und folglich $z = 4a^2\pi$ ist.

265b.

Aufgabe. Die Fläche zu finden, welche die um ihre Achse AA rotirende Cycloide beschreibt.

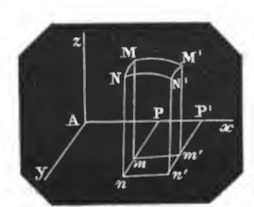
Auflösung. Aus den beiden Gleichungen (§ 156):

$$x = r\theta - r\sin\theta$$
$$y = r - r\cos\theta \qquad \text{folgt: } ds = 2r\sin\tfrac{1}{2}\theta d\theta.$$
$$z = 2\pi\int y ds = 16r^2\pi\int_0^\pi \sin^3\tfrac{1}{2}\theta\cdot d\theta \text{ und (§ 210):}$$
$$z = \frac{64}{3}r^2\pi$$

266.

* Um schliesslich noch eine allgemeine Formel zu finden, nach welcher man auch die Oberflächen solcher Körper berechnen kann, die nicht durch Rotation entstanden, für deren Oberfläche aber eine Gleichung:

$$z = F(x, y)$$



gegeben ist, lasse man $AP = x$ um $PP' = \Delta x$ und $Pm = y$ um $mn = \Delta y$ wachsen, und bilde das Rechteck $mm'n'n$, dessen Seiten Δx, Δy sind. Legt man durch die Seiten dieses Rechtecks Ebenen, wovon zwei mit der Ebene yAz, und zwei mit der Ebene xAz parallel sind, so fassen diese vier, auf yAx senkrechten Ebenen von der fraglichen Oberfläche ein krummlinigt begrenztes Stück, MM'N'N, zwischen sich, dessen Projection auf der Ebene der xy offenbar das Rechteck $mm'n'n$ ist.

Lässt man nun Δx, Δy bis zu Differentialen convergiren, so verwandelt sich das erwähnte Flächenstück MM'N'N in ein gradlinigt begrenztes, welches man als Tangential-Ebene des Punctes $M(x, y, z)$ und als das Differential dz der gesuchten Fläche betrachten kann.

Heisst nun U der Winkel, den diese Tangential-Ebene mit der Projections-Ebene yAx macht, so ist (höh. Geom. § 107):

$$dz\cdot\cos U = dx\cdot dy$$

und da nun (§ 183), $\cos U = \dfrac{1}{\sqrt{1+\left(\frac{dz}{dx}\right)^2+\left(\frac{dz}{dy}\right)^2}}$, so hat man:

$$dz = dx \cdot dy \cdot \sqrt{1+\left(\frac{dz}{dx}\right)^2+\left(\frac{dz}{dy}\right)^2}$$

$$z = \int\!\!\int dx\,dy \cdot \sqrt{1+\left(\frac{dz}{dx}\right)^2+\left(\frac{dz}{dy}\right)^2}$$

und wo nun das, fast immer auf grosse Weitläufigkeiten führende Doppel-Integral innerhalb der Grenzen genommen werden muss, welche die Horizontalprojection der gesuchten Fläche in sich fasst.

267.

* Aufgabe. Man suche nach vorstehender Formel die Oberfläche der Kugel, deren Gleichung:

$$x^2 + y^2 + z^2 = r^2$$

Auflösung. Man hat hier zuerst $\left(\frac{dz}{dx}\right) = -\frac{x}{z}$, $\left(\frac{dz}{dy}\right) = -\frac{y}{z}$ und also $\sqrt{1+\left(\frac{dz}{dx}\right)^2+\left(\frac{dz}{dy}\right)^2} = \frac{r}{z} = \frac{r}{\sqrt{r^2-x^2-y^2}}$, mithin:

$$z = r\int dx \int_{y=0}^{y=\sqrt{r^2-x^2}} \frac{dy}{\sqrt{r^2-x^2-y^2}}$$

Setzt man $r^2 - x^2 = \varrho^2$, so hat man:

$$\int \frac{dy}{\sqrt{\varrho^2-y^2}} = \arcsin\frac{y}{\varrho}, \text{ also } \int_0^\varrho \frac{dy}{\sqrt{\varrho^2-y^2}} = \tfrac{1}{2}\pi$$

$$z = \tfrac{1}{2}\pi r \cdot \int_0^r dx = \tfrac{1}{2}r^2\pi$$

Für alle acht Quadranten ist also:

$$z = 4r^2\pi.$$

Neunzehntes Buch.

Näherungsweise Integrationen innerhalb bestimmter Grenzen.

268.

Streng genommen kann man nur die Differentiale von der Form $ax^m dx$ (wo m nicht $= -1$ ist), als integrabel betrachten, denn alle übrigen Formen, welche immer auf transcendente Functionen führen, wie $\frac{dx}{1+x}$, $\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$ etc. sind nur deshalb als integrirbar anzusehen, weil man ihre Integrale $l(1+x)$, $\arcsin x$ etc. für beliebige Werthe von x aus vollständig berechneten logarithmisch-trigonometrischen Tafeln entnehmen kann.

Sehr häufig kommen nun aber Fälle vor, wo man das Integral eines Differentials, selbst unter Zuziehung der erwähnten transcendenten Functionen, doch nicht in geschlossener Form erhalten kann, weil man entweder nicht die anzuwendende Methode kennt, welche zu dem fraglichen Integral führt, oder auch, weil in der Wirklichkeit gar keine Function existirt, welche differentiirt, das zu integrirende Differential wiedergiebt, In diesen Fällen muss man sich dann mit einer Annäherung begnügen und hierzu giebt es verschiedene Mittel, wie folgende §§ zeigen.

269.

Integration durch unendliche Reihen. Man suche das zu integrirende Differential $f(x)dx$, d. h. den Factor $f(x)$ in eine

solche unendliche Reihe zu verwandeln, welche für diejenigen Grenzen, für welche das Integral bestimmt werden soll, gut convergirt, und integrire jedes einzelne Glied. Als Beispiel nehmen wir die Rectification der Ellipse. Aus: $a^2y^2 + b^2x^2 = a^2b^2$ folgt: $a^2 - b^2 = a^2\varepsilon^2$ gesetzt, wo $\varepsilon = \frac{e}{a}$ ist (höh. Geom. § 37), wenn das Integral von $x = 0$ anheben soll (§ 243):

$$s = \int_0^x \frac{\sqrt{a^2 - \varepsilon^2 x^2}}{\sqrt{a^2 - x^2}} \cdot dx$$

In geschlossener Form lässt sich dies Integral nicht darstellen. Wollte man deshalb beide Wurzelgrössen:

$$\sqrt{a^2 - \varepsilon^2 x^2} = a\left(1 - \frac{\varepsilon^2}{a^2}x^2\right)^{\frac{1}{2}} \text{ und } \left(a^2 - x^2\right)^{-\frac{1}{2}} = a^{-1}\left(1 - \frac{x^2}{a^2}\right)^{-\frac{1}{2}}$$

in unendliche Reihen verwandeln, so würden beide Reihen (weil der zweite Theil des Binoms ein echter Bruch ist), sowie auch ihr Product convergent werden und die Integration eines jeden Gliedes möglich sein. Durch die Einführung einer neuen veränderlichen Grösse gelangt man aber kürzer zum Ziel.

Setzt man nämlich $x = a\cos\theta$, mithin $dx = -a\sin\theta d\theta$, so hat man:

$$\int_0^x \frac{\sqrt{a^2 - \varepsilon^2 x^2}}{\sqrt{a^2 - x^2}} \cdot dx = -a\int_{\frac{1}{2}\pi}^{\theta} \sqrt{1 - \varepsilon^2\cos^2\theta} \cdot d\theta \;^{*)}$$

$$s = a\int_{\theta}^{\frac{1}{2}\pi} (1 - \varepsilon^2\cos^2\theta)^{\frac{1}{2}} \cdot d\theta \;^{**)}$$

Weil nun ε, also auch $\varepsilon\cos\theta$, ein echter Bruch ist, so kann man die Wurzelgrösse in eine convergente Reihe auflösen und hat dann (Anal. § 71):

---

*) Aus $x = a\cos\theta$, folgt $\theta = \arccos\frac{x}{a}$ und für $x = 0$ ist $\theta = \frac{1}{2}\pi$, d. h. die den alten Grenzen 0 und x entsprechenden neuen Grenzen sind $\theta = \frac{1}{2}\pi$ und $\theta = \arccos\frac{x}{a}$.

**) Man darf immer die Grenzen umkehren, wenn man zugleich das Vorzeichen umkehrt. Denn wären für die untere und obere Grenze die Werthe des ersten Integrals m und n, mithin $s = -a(n - m)$, so wäre das zweite Integral $= a(m - n)$, also ganz dasselbe.

$$s = a\int_0^{\frac{1}{2}\pi}\left(1 - \tfrac{1}{2}\varepsilon^2\cos^2\theta - \frac{1\cdot 1}{2\cdot 4}\varepsilon^4\cos^4\theta - \frac{1\cdot 1\cdot 3}{2\cdot 4\cdot 6}\varepsilon^6\cos^6\theta - - \cdots\right)d\theta$$

Die einzelnen Glieder lassen sich am leichtesten integriren, wenn man die Potenzen der cosinus durch Vielfache des Bogens ausdrückt. Es ist nämlich (Anal. § 97):

$$\begin{aligned}
\cos^2\theta &= \tfrac{1}{2}\,(\cos 2\theta + 1)\\
\cos^4\theta &= \tfrac{1}{8}\,(\cos 4\theta + 4\cos 2\theta + 3)\\
\cos^6\theta &= \tfrac{1}{32}(\cos 6\theta + 6\cos 4\theta + 15\cos 2\theta + 10)\\
&\;\;\vdots \qquad\qquad\qquad \vdots
\end{aligned}$$

Werden diese Werthe substituirt, so hat man:

$$(1 - \varepsilon^2\cos^2\theta)^{\frac{1}{2}} = \left\{\begin{array}{l}
1 - \tfrac{1}{2}\varepsilon^2\cdot\tfrac{1}{2}(\cos 2\theta + 1)\\
-\dfrac{1\cdot 1}{2\cdot 4}\varepsilon^4\cdot\tfrac{1}{8}(\cos 4\theta + 4\cos 2\theta + 3)\\
-\dfrac{1\cdot 1\cdot 3}{2\cdot 4\cdot 6}\varepsilon^6\cdot\tfrac{1}{32}(\cos 6\theta + 6\cos 4\theta + 15\cos 2\theta + 10)\\
\qquad\qquad\vdots
\end{array}\right\}$$

Es ist mithin:

$$s = a\int_0^{\frac{1}{2}\pi} d\theta\cdot\left\{\begin{array}{l}
1 - \tfrac{1}{2}\cdot\tfrac{1}{2}\varepsilon^2 - \dfrac{1\cdot 1}{2\cdot 4}\cdot\tfrac{3}{8}\varepsilon^4 - \dfrac{1\cdot 1\cdot 3}{2\cdot 4\cdot 6}\cdot\tfrac{10}{32}\varepsilon^6 - \cdots\\
-(\tfrac{1}{4}\varepsilon^2 + \tfrac{1}{16}\varepsilon^4 + \tfrac{15}{512} + \cdots)\cos 2\theta\\
-(\tfrac{1}{64}\varepsilon^4 + \tfrac{3}{256}\varepsilon^6 + \cdots\cdots)\cos 4\theta\\
-(\tfrac{1}{512}\varepsilon^6 + \cdots\cdots\cdots\cdots)\cos 6\theta\\
\qquad\vdots
\end{array}\right\}$$

$$s = a\cdot\left\{\begin{array}{r}
\left[1 - (\tfrac{1}{2})^2\varepsilon^2 - \left(\dfrac{1\cdot 3}{2\cdot 4}\right)^2\cdot\dfrac{\varepsilon^4}{3} - \left(\dfrac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6}\right)^2\cdot\dfrac{\varepsilon^6}{5} - \cdots\cdots\right]\cdot\theta\\
-(\tfrac{1}{8}\varepsilon^2 + \tfrac{1}{32}\varepsilon^4 + \tfrac{15}{1024}\varepsilon^6 + \cdots\cdots\cdots)\cdot\sin 2\theta\\
-(\tfrac{1}{256}\varepsilon^4 + \tfrac{3}{1024}\varepsilon^6 + \cdots\cdots\cdots)\cdot\sin 4\theta\\
-(\tfrac{1}{3072}\varepsilon^6 + \cdots\cdots\cdots\cdots)\cdot\sin 6\theta\\
\vdots\qquad\qquad\qquad\qquad
\end{array}\right.$$

Soll das Integral von $x = 0\,(\theta = \tfrac{1}{2}\pi)$ anheben, so müsste eine Constante $C = -\left[1 - (\tfrac{1}{2})^2\varepsilon^2 = \left(\dfrac{1\cdot 3}{2\cdot 4}\right)^2\cdot\dfrac{\varepsilon^4}{3} - \cdots\cdots\right]\dfrac{\pi}{2}$ hinzugefügt

werden. Lässt man aber das Integral von $\theta = 0\,(x = a)$ anheben, so ist keine Constante nöthig. Setzt man dann für θ einen beliebigen Werth, $\theta_{,}(x = a\cos\theta_{,})$, so hat man das Integral von $\theta = 0$ bis $\theta = \theta_{,}$ ($x = a$ bis $x = a\cos\theta_{,}$) durch eine gut convergirende Reihe, wobei jedoch zu beachten, dass die Länge des erhaltenen Bogens nicht vom Scheitel der kleinen Achse, sondern von dem der grossen an gerechnet wird. Wir erhalten demnach die Länge des elliptischen Bogens, dessen Endpuncts-Abscissen $x = a$ und $x = a \cdot \cos\theta_{,}$.

Will man einen ganzen Quadranten haben, so muss man $\theta = \frac{1}{2}\pi$ setzen, und dann ist:

$$s = a\frac{\pi}{2}\left\{1 - (\tfrac{1}{2})^2\varepsilon^2 - \left(\frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}\right)^2\cdot\frac{\varepsilon^4}{3} - \left(\frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6}\right)^2\cdot\frac{\varepsilon^6}{5} - \cdots\cdots\right\}$$

270.

Die Integration durch eine unendliche Reihe, wenn überhaupt möglich, führt in der Regel auf grosse Weitläufigkeiten, indem fast immer erst Substitutionen oder Umformungen vorgenommen werden müssen, um eine convergente Reihe zu erhalten, dann auch die Reihe nicht rasch genug convergirt. Kann man aber in dem zu suchenden bestimmten Integral $\int_{x_0}^{x} f(x)\,dx$ den Werth von $f(x)$ für jeden Werth von $x = x_0$ bis $x = x$ in Zahlen berechnen, so giebt es noch andere Methoden, nach welchen man dann das Integral näherungsweise findet. Von diesen Methoden, die sogenannte numerische oder mechanische Integration (Quadratur), die besonders häufig in der höheren Mechanik bei Berechnung der Störungen der Planeten- und Cometen-Bahnen angewandt werden, wollen wir in nachstehenden §§ drei mittheilen.

271.

1. Methode. Theilt man das Intervall $x - x_0$, innerhalb dessen das Integral $\int f(x)\,dx$ genommen werden soll, in n gleiche Theile und setzt Kürze halber $\frac{x - x_0}{n} = h$, so ist zufolge § 222, für ein kleines h näherungsweise:

$$\int_{x_0}^{x} f(x)\,dx = h\Big[f(x_0 + f(x_0 + h) + f(x_0 + 2h) + \cdots + f(x_0 + (n-1)h)\Big]$$

$$\int_{x_0}^{x} (f(x)dx = h)\Big[f(x_0 + h) + f(x_0 + 2h) + f(x_0 + 3h) + \cdots\cdots f(x)\Big]$$

Beide Reihen, von welchen die eine zu viel, die andere zu wenig giebt,*) kommen dem gesuchten wahren Integral desto näher, je grösser n oder je kleiner h ist. Der Unterschied beider ist $[f(x) - f(x_0)] \cdot h$,

Nehmen wir von der Summe beider Reihen das Mittel, so ist näherungsweise:

$$\int_{x_0}^{x} f(x)\,dx = h\left[\tfrac{1}{2}f(x_0) + f(x_0 + h) + f(x_0 + 2h + \cdots + \tfrac{1}{2}f(x)\right]$$

Um die Genauigkeit dieser Formel an einem bekannten Fall zu prüfen, wollen wir darnach das Integral $\int_1^2 \frac{dx}{1+x^2}$ berechnen, welches uns in geschlossener Form bekannt ist und aus den gewöhnlichen Tafeln bis auf sieben Decimalen genau entnommen werden kann. Es ist nämlich $\int \frac{dx}{1+x^2} = \text{arc tg}\, x$, mithin:

$$\int_1^2 \frac{dx}{1+x^2} = \text{arc}(\text{tg} = 2) - \text{arc}(\text{tg} = 1) = \text{arc}(\text{tg} = \tfrac{1}{3}).$$ (Trig. §100,43.)

Schlägt man den Winkel φ auf, dessen $\text{tg} = \frac{1}{3}$ ist, so findet man $\varphi = 18^0\, 26'\, 5'',8$. Die Länge des hiezu gehörigen, mit dem Radius $= 1$ beschriebenen Bogens ist $= \pi \cdot \frac{\varphi}{180} = 0{,}32175053$. Es ist mithin:

$$\int_1^2 \frac{dx}{1+x^2} = \text{arc}(\text{tg} = \tfrac{1}{3}) = 0{,}32175053 \cdot\cdot$$

Unsere Formel (worin $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$, $x_0 = 1$; $x = 2$) giebt uns, indem wir das Intervall in $n = 4$ Theile theilen, also $h = \frac{2-1}{4} = \frac{1}{4}$ setzen:

$$\int_1^2 \frac{dx}{1+x^2} = \tfrac{1}{4}\left[\tfrac{1}{2} \cdot \frac{1}{1+1} + \frac{1}{1+(1\frac{1}{4})^2} + \frac{1}{1+(1\frac{2}{4})^2} + \frac{1}{1+(1\frac{3}{4})^2} + \tfrac{1}{2} \cdot \frac{1}{1+2^2}\right] = 0{,}31967$$

also, wie die Vergleichung zeigt, nur bis auf eine Decimale genau. Weil aber $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$ in dem angegebenen Intervall stets abnehmend ist, so giebt die Formel für ein grösseres n auch ein genaueres Resultat.

---

*) Wäre $f(x)$ innerhalb des Intervalls $x - x_0$ bald wachsend, bald abnehmend, so könnte die eine Reihe das Integral zufällig ganz genau geben.

272.

2. Methode. Nach dem Taylor'schen Lehrsatz (§ 46) ist immer (wenn $f(x)$ und ihre Derivirten als continuirlich vorausgesetzt werden, und dort statt der veränderlichen Grösse x die Constante x_0, und $x - x_0$ statt Δx gesetzt wird), weil $f(x) = f(x_0 + x - x_0)$:

$$f(x) = f(x_0) + (x - x_0) \cdot f'(x_0) + \frac{(x-x_0)^2}{1 \cdot 2} f''(x_0) + \cdots \quad (1)$$

wo das Intervall $x - x_0$ so klein sein muss, dass die Reihe, wenn nicht endlich, convergent wird.

Multiplicirt man beiderseits mit dx und integrirt von x_0 bis x, so hat man: *)

$$\int_{x_0}^{x} f(x)dx = (x-x_0)f(x_0) + \frac{(x-x_0)^2}{1 \cdot 2} \cdot f'(x_0) + \frac{(x-x_0)^3}{1 \cdot 2 \cdot 3} \cdot f''(x_0) + \cdots \quad (2)$$

Setzen wir Kürze halber das Intervall $x - x_0 = h$, so ist: **)

$$\int_{x_0}^{x_0+h} f(x)dx = h\left[f(x_0) + \frac{h}{1 \cdot 2} f'(x_0) + \frac{h^2}{1 \cdot 2 \cdot 3} \cdot f''(x_0) + \cdots\right] \cdots\cdots (3)$$

---

*) Es ist:

$$\int f(x_0)dx = f(x_0) \cdot x + c, \text{ mithin:}$$

$$\int_{x_0}^{x} f(x_0)dx = f(x_0) \cdot x - f(x_0) \cdot x_0 = (x - x_0) \cdot f(x_0).$$

Ebenso ist:

$$\int f'(x_0) \cdot (x - x_0)dx = f'(x_0) \cdot \frac{(x-x_0)^2}{2} + c, \text{ mithin:}$$

$$\int_{x_0}^{x} f'(x_0)(x - x_0)dx = f'(x_0) \cdot \frac{(x-x_0)^2}{1 \cdot 2}$$

**) Wäre z. B. $f(x) = x^3$, also $f'(x) = 3x^2$, $f''(x) = 6x$, $f'''(x) = 6$, so ist:

$$\int x^3 dx = \frac{x^4}{4} + c, \text{ mithin für } x_0 = 3 \text{ und } h = 2$$

$$\int_3^{3+2} x^3 dx = \frac{5^4}{4} - \frac{3^4}{4} = 136, \text{ aber auch:}$$

$$\int_3^{3+2} x^3 dx = 2\left[3^3 + \frac{2}{1 \cdot 2} \cdot 3 \cdot 3^2 + \frac{2^2}{1 \cdot 2 \cdot 3} \cdot 6 \cdot 3 + \frac{2^3}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} \cdot 6\right] = 136.$$

Um in speciellen Fällen, wo nämlich $f(x)$ gegeben ist, die Differential-Quotienten $f'(x)$, $f''(x)$ etc. nicht entwickeln zu brauchen, nehmen wir an, der Werth der eingeklammerten Reihe lasse sich kürzer und mit hinreichender Genauigkeit, durch die Summe der drei Functionen $f(x_0)$, $f(x_0 + \frac{1}{2}h)$, $f(x_0 + h)$, welche jede aber noch mit einem erst zu bestimmenden Coefficienten, c, c', c'', multiplicirt ist, darstellen. *) Es sei nämlich:

$$c \cdot f(x_0) + c' \cdot f(x_0 + \tfrac{1}{2}h) + c'' \cdot f(x_0 + h) = f(x_0) + \frac{h}{1 \cdot 2} f'(x_0) + \frac{h^2}{2 \cdot 3} \cdot f''(x_0) + \ldots$$

oder, indem wir linker Hand $f(x_0 + \frac{1}{2}h)$ und $f(x_0 + h)$ nach dem Taylor'schen Lehrsatz entwickeln:

$$\left.\begin{array}{l} cf(x_0) \\ c'f(x_0) + c' \cdot \frac{h}{2} f'(x_0) + c' \cdot \left(\frac{h}{2}\right)^2 \cdot \frac{f''(x_0)}{1 \cdot 2} + \ldots \\ c''f(x_0) + c''.h.f'(x_0) + c''.h^2.\frac{f''(x_0)}{1 \cdot 2} + \ldots \end{array}\right\} = f(x_0) + \frac{h}{1 \cdot 2} f'(x_0) + \frac{h^2}{2 \cdot 3} f''(x_0) + \ldots$$

Damit nun die bedeutendsten Glieder der linken Seite mit so vielen Gliedern der rechten als möglich übereinstimmen, hat man zur Bestimmung der fraglichen constanten Factoren c, c', c'' die Bedingungsgleichungen:

$$\left.\begin{array}{r} c + c' + c'' = 1 \\ \frac{c'}{2} + c'' = \frac{1}{2} \\ \frac{c'}{8} + \frac{c''}{2} = \frac{1}{6} \end{array}\right\} \text{ hieraus: } \left\{\begin{array}{l} c'' = \frac{1}{6} \\ c' = \frac{4}{6} \\ c = \frac{1}{6} \end{array}\right.$$

Unsere Annäherungsformel wäre also:

$$\int_{x_0}^{x_0+h} f(x)\,dx = \frac{h}{6}\left[f(x_0) + 4f(x_0 + \tfrac{1}{2}h) + f(x_0 + h)\right)$$

Beispiel. Für $\int_1^2 \frac{dx}{1+x^2}$ hat man: $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$, $x_0 = 1$, $h = 1$,

*) Nimmt man mehr als drei Functionen (am besten eine ungrade Anzahl), so wird die Näherungsformel genauer, aber auch weitläufiger.

mithin:

$$\int_1^2 \frac{dx}{1+x^2} = \frac{1}{6}\left[\frac{1}{1+1} + \frac{4}{1+(1\frac{1}{2})^2} + \frac{1}{1+2^2}\right] = 0{,}32179\cdots$$

also bis auf vier Decimalen genau.

Anmerkung. Man kann diese Näherungs-Formel statt der Simpson'schen benutzen, so wie auch, um den Cubicinhalt solcher Körper zu bestimmen, die durch Umdrehung einer unbekannten, jedoch nur einförmig und wenig gekrümmten Linie um eine Achse entstanden. Sei z. B. die halbe Länge eines Fasses $= h$, der Durchmesser des Bodens $= a$, der des Spundes $= c$ und der mittlere $= b$, durch unmittelbare Messung gefunden. Wäre die Gleichung der Erzeugungslinie bekannt, $y = fx$, so wäre nach § 251 der Inhalt des ganzen Fasses $V = 2\pi\int_0^h (fx)^2 \cdot dx$. Da nun hier $f(x_0) = \frac{1}{2}a$, $f(x_0 + \frac{1}{2}h) = \frac{1}{2}b$, $f(x_0 + h) = \frac{1}{2}c$, so ist näherungsweise auch:

$$V = \frac{h\pi}{12}(a^2 + 4b^2 + c^2)$$

Diese Formel ist von jeder Hypothese über die Art der krummen Linie unabhängig und deshalb der Lambert'schen Formel vorzuziehen.

273.

3. Methode. Noch genauere Näherungsformeln hat Gauss angegeben. Eine davon, welche wir mittheilen wollen, lässt sich folgendermaassen ableiten: Setzen wir in:

$$\int_{x_0}^{x_0+h} f(x)dx$$

die untere Grenze $x_0 = b - \frac{1}{2}h$, so wird die obere $= b + \frac{1}{2}h$, daher:

$$\int_{x_0}^{x_0+h} f(x)dx = \int_{b-\frac{1}{2}h}^{b+\frac{1}{2}h} f(x)dx$$

Setzen wir noch rechter Hand $x = b + u$, mithin $dx = du$, so ist:

$$\int_{x_0}^{x_0+h} f(x)dx = \int_{b-\frac{1}{2}h}^{b+\frac{1}{2}h} f(x)dx = \int_{-\frac{1}{2}h}^{+\frac{1}{2}h} f(b+u)\,du$$

Es ist wohl klar, dass in dem letzten Integral in Bezug auf u die entsprechenden Grenzen $-\frac{1}{2}h$ und $+\frac{1}{2}h$ sein müssen. Denn setzt man $-\frac{1}{2}h$ statt u, so kommt dasselbe, als wenn man im mittlern Integrale $b-\frac{1}{2}h$ statt x setzt.

Letzteres Integral lässt sich durch diesen Kunstgriff in eine Reihe entwickeln. Es ist nämlich:

$$f(b+u) = f(b) + f'(b)\cdot u + f''(b)\cdot\frac{u^2}{1\cdot 2} + f'''(b)\cdot\frac{u^3}{1\cdot 2\cdot 3} + \cdots$$

Beiderseits mit du multiplicirt und integrirt, kommt:

$$\int f(b+u)\,du = C + u\cdot f(b) + \frac{u^2}{1\cdot 2}\cdot f'(b) + \frac{u^3}{1\cdot 2\cdot 3}\cdot f''(b) + \cdots$$

Nehmen wir nun dies Integral von $u=-\frac{1}{2}h$ bis $u=+\frac{1}{2}h$, so wird die Constante C eliminirt und wir haben, da (was grade beabsichtigt wurde) alle grade Potenzen von h herausfallen und nur halb so viel Glieder bleiben:

$$\int_{-\frac{1}{2}h}^{+\frac{1}{2}h} f(b+u)\,du = h\left[f(b) + \left(\frac{h}{2}\right)^2\cdot\frac{f''(b)}{1\cdot 2\cdot 3} + \left(\frac{h}{2}\right)^4\cdot\frac{f^{\mathrm{IV}}(b)}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5} + \cdots\cdots\right.$$

Nehmen wir nun an, die eingeklammerte Reihe lasse sich mit hinreichender Annäherung durch zwei Functionen, $f(b+mh)$ und $f(b+m'h)$, welche jede aber noch mit einem Factor, k, k', multiplicirt ist, ausdrücken; so dass nämlich:

$$k\cdot f(b+mh) + k'\cdot f(b+m'h) = f(b) + \frac{h^2}{4}\cdot\frac{f''(b)}{1\cdot 2\cdot 3} + \frac{h^4}{16}\cdot\frac{f^{\mathrm{IV}}(b)}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5} + \cdots$$

Werden die beiden Glieder linker Hand nach dem Taylor'schen Lehrsatz entwickelt, so muss zur Erreichung unserer Absicht die Entwickelung nothwendig so beschaffen sein, dass alle Glieder mit ungraden Potenzen von h von selbst ausfallen. Dies fordert aber offenbar, dass erstens, die beiden Coefficienten k, k' einander gleich sind, und zweitens, dass $m'=-m$ ist. Um ferner, der einfachern Rechnung halber, die Quadrate der Coefficienten m und $-m$ zu vermeiden, da beide in der Entwickelung mit h zugleich in graden Potenzen vorkommen, setzen wir $m=\sqrt{q}$, dann ist:

$$k \cdot f(b+h\sqrt{q}) = k\left[f(b) + h\sqrt{q}\cdot f'(b) + h^2 q \cdot \frac{f''(b)}{1\cdot 2} + h^3 q^{\frac{3}{2}} \cdot \frac{f'''(b)}{1\cdot 2\cdot 3} + \cdots\right]$$

$$k \cdot f(b-h\sqrt{q}) = k\left[f(b) - h\sqrt{q}\cdot f'(b) + h^2 q \cdot \frac{f''(b)}{1\cdot 2} - h^3 q^{\frac{3}{2}} \cdot \frac{f'''(b)}{1\cdot 2\cdot 3} + \cdots\right]$$

Es ist also:

$$2k\cdot f(b) + 2kh^2 q \cdot \frac{f''(b)}{1\cdot 2} = f(b) + \frac{h^2}{4}\frac{f''(b)}{1\cdot 2\cdot 3}$$

Aus $2k = 1$ und $kq = \frac{1}{24}$ folgt: $k = \frac{1}{2}$ und $q = \frac{1}{12}$.

Die Näherungsformel wäre also:

$$\int_{-\frac{1}{2}h}^{+\frac{1}{2}h} f(b+u)du = \int_{b-\frac{1}{2}h}^{b+\frac{1}{2}h} f(x)dx = h\left[\tfrac{1}{2}f\left(b+\frac{h}{\sqrt{12}}\right) + \tfrac{1}{2}f\left(b-\frac{h}{\sqrt{12}}\right)\right]$$

oder $b - \frac{1}{2}h = x_0$ also $b = x_0 + \frac{1}{2}h$ gesetzt, so geschrieben:

$$\int_{x_0}^{x_0+h} f(x)dx = \frac{h}{2}\left\{f\left[x_0 + \left(\tfrac{1}{2}+\frac{1}{\sqrt{12}}\right)h\right] + f\left[x_0 + \left(\tfrac{1}{2}-\frac{1}{\sqrt{12}}\right)h\right]\right\}$$

274.

Entwickeln wir die Näherungsformel mit drei Gliedern, so kann man annehmen, es sei:

$$k\cdot f(b+h\sqrt{q}) + k\cdot f(b-h\sqrt{q}) + k' f(b) = f(b) + \frac{h^2}{4}\cdot\frac{f''(b)}{1\cdot 2\cdot 3} + \cdots.$$

Mithin mit Benutzung vorhergehender Entwickelung:

$$(2k+k')\cdot f(b) + 2k\cdot h^2 q \cdot \frac{f''(b)}{1\cdot 2} + 2k\cdot h^4 q^2 \cdot \frac{f''(b)}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}$$
$$= f(b) + \frac{h^2}{4}\cdot\frac{f''(b)}{1\cdot 2\cdot 3} + \frac{h^4}{16}\cdot\frac{f^{IV}(b)}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5} + \cdots.$$

$$2k + k' = 1;\quad kq = \tfrac{1}{24};\quad kq^2 = \tfrac{1}{160}$$

$$q = \tfrac{3}{20};\quad k = \tfrac{5}{18};\quad k' = \tfrac{4}{9}$$

$$\int_{b-\frac{1}{2}h}^{b+\frac{1}{2}h} f(x)dx = h\left[\tfrac{4}{9}f(b) + \tfrac{5}{18}f(b+h\sqrt{\tfrac{3}{20}}) + \tfrac{5}{18}\cdot f(b-h\sqrt{\tfrac{3}{20}})\right]$$

Zwanzigstes Buch.

Integration der Differential-Gleichungen.

I. Differentialgleichungen erster Ordnung ersten Grades.

275.

Erklärung. Jede Gleichung, in welcher veränderliche Grössen mit ihren Differentialen oder Differential-Quotienten, oder auch bloss Differentiale mit Constanten vermischt vorkommen, heisst eine Differentialgleichung. Die primitive Gleichung zwischen den veränderlichen Grössen dagegen, aus welcher die Differentialgleichung ihren Ursprung hat und durch arithmetische Operationen daraus abgeleitet werden kann, wird die entsprechende Integralgleichung genannt. Diese primitive oder sogenannte Integralgleichung muss also so beschaffen sein, dass wenn daraus die Werthe der abhängig veränderlichen Grösse und ihre Differentiale gezogen und in die Differentialgleichung substituirt werden, derselben Genüge geleistet wird. So ist z. E., um das Gesagte durch ein Beispiel zu erläutern:

$$y \cdot \sqrt{1 + \frac{dy^2}{dx^2}} = a \cdots\cdots\cdots\cdots (1)$$

eine Differentialgleichung zwischen zwei veränderlichen Grössen und die hiezu gehörige Integralgleichung, wenn man x als absolut veränderlich betrachtet, ist:

$$y^2 + x^2 = a^2 \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (2)$$

Denn zieht man aus (2) die Werthe y und $\frac{dy}{dx}$, nämlich $y = \sqrt{a^2 - x^2}$ und $\frac{dy}{dx} = -\frac{x}{\sqrt{a^2 - x^2}}$ und substituirt sie in (1), so wird derselben Genüge geleistet, denn, weil $1 + \frac{dy^2}{dx^2} = \frac{a^2}{a^2 - x^2}$, so ist:

$$\sqrt{a^2 - x^2} \cdot \sqrt{\frac{a^2}{a^2 - x^2}} = a$$

276.

Auf die Frage, wie man auf Differentialgleichungen kommt, können wir vorläufig nur antworten, dass dies sehr häufig der Fall ist bei den Anwendungen der Mathematik auf Geometrie, Mechanik und Physik (physico-mathématiques), wo man den Zusammenhang veränderlicher Grössen (Ursache und Wirkung) aus bekannten Eigenschaften oder Bedingungen sucht, die man nicht anders, als durch Differentiale und Differentialgleichungen ausdrücken kann. Frägt man z. B., welches ist die krumme Linie, deren Normale für alle Puncte dieselbe, $= a$ ist, so würde man, um diese Eigenschaft der gesuchten Linie auszudrücken, nach § 49, als Bedingungsgleichung die Differentialgleichung:

$$y\sqrt{1 + \frac{dy^2}{dx^2}} = a$$

aufstellen und hieraus die fragliche Beziehung (Integralgleichung) zwischen x und y finden müssen. Frägt man, welche krumme Linie ist so beschaffen, dass für jeden ihrer Puncte die Subtangente gleich der doppelten Abscisse ist, so würde man diese Bedingung (Eigenschaft) durch die Differentialgleichung $y\frac{dx}{dy} = 2x$ ausdrücken müssen (§ 49).

Bevor wir solche Art Aufgaben, deren wir im folgenden Buche mehrere aufstellen werden, lössen können, müssen wir erst die Methoden kennen lernen, um zu gegebenen Differentialgleichungen die ihnen entsprechenden Integralgleichungen zu finden.

277.

Der Ordnung halber hat man sämmtliche Differentialgleichungen in Abtheilungen gebracht. Eine Differentialgleichung gehört

nämlich zur 1sten, 2ten, 3ten···· Ordnung, je nachdem darin das 1ste, 2te, 3te···· Differential (dy, d^2y, $d^3y\cdots$) der abhängig veränderlichen Grösse vorkommt; ferner zum 1sten, 2ten, 3ten··· Grade, je nachdem das Differential der abhängigen Grösse in der 1sten, 2ten, 3ten···· Potenz (dy, dy^2, $dy^3\cdots$) darin enthalten ist.

Wir betrachten hier zunächst diejenigen Differentialgleichungen erster Ordnung und ersten Grades, welche nur zwei veränderliche Grössen, x, y, enthalten und sehen x als absolut veränderlich an. Bemerken müssen wir übrigens noch, dass die Integration der Differentialgleichungen fast immer mit grossen Schwierigkeiten verbunden ist und dass hier nur wenige allgemeine Methoden gefunden worden sind.

278.

1. Methode. Unmittelbare Integration, wenn die Differentialgleichung ein vollkommenes Differential ist, d. h. als durch unmittelbares Differentiiren einer primitiven Function, $F(x,y) = 0$, entstanden betrachtet werden kann.

Zufolge § 136 erhält man das Differential einer Function, $F(x,y) = 0$, indem man sie so differentiirt, als wenn sowohl y als x absolut veränderlich wäre, nämlich:

$$\left(\frac{dF}{dy}\right) dy + \left(\frac{dF}{dx}\right) dx = 0$$

Ferner folgt aus § 164 (indem man dort $z = 0$ setzt), dass es einerlei ist, ob man $F(x,y) = 0$ erst in Bezug auf x und darauf wieder in Bezug auf y differentiirt, oder in umgekehrter Ordnung verfährt und erst in Bezug auf y und dann auf x differentiirt, in Zeichen:

$$\left(\frac{d^2F}{dxdy}\right) dxdy = \left(\frac{d^2F}{dydx}\right) dydx$$

Dies vorausgeschickt, bemerke man, dass eine jede Differentialgleichung erster Ordnung ersten Grades sich immer auf die Form:

$$Mdy + Ndx = 0$$

bringen lässt, wo M,N im Allgemeinen Functionen von x und y sind.

Wäre nun in dieser Differentialgleichung zufällig

$$\left(\frac{dM}{dx}\right) = \left(\frac{dN}{dy}\right)$$

wovon man sich durch wirkliche Differentiation leicht überzeugen kann, so könnte man die Differentialgleichung $Mdy+Ndx=0$ als ein vollkommenes Differential, d. h. als durch unmittelbares Differentiiren einer Function von x, y entstanden denken und dann auch diese Function (die Integralgleichung) durch unmittelbares Integriren, d. h. ohne neue Kunstgriffe, nach den im Vorhergehenden gezeigten Methoden finden, indem man nur eins der beiden Glieder, z. B. Mdy, in Bezug auf y integrirt und dabei x einstweilen als constant ansieht, dem gefundenen Integral jedoch (weil es noch ein Glied in x allein enthalten kann) noch eine unbestimmte Function von x, die wir mit $\varphi(x)$ bezeichnen wollen, hinzufügt. Was $\varphi(x)$ sein muss, ergiebt sich dann, indem man das erhaltene Integral rückwärts wieder differentiirt und den Differential-Coefficient von dx mit N vergleicht oder $= N$ setzt.

279.

Beispiel 1. Man suche die entsprechende Integralgleichung zu:

$$3y^2dy - 8xydx + 3x^2dx = 4x^2dy \cdots\cdots\cdots (1)$$

Auflösung. Die Differentialgleichung (1) lässt sich erstlich so schreiben:

$$(3y^2 - 4x^2)dy + (3x^2 - 8xy)dx = 0 \cdots\cdots\cdots (2)$$

Um zu erkennen, ob diese Differentialgleichung als durch unmittelbares Differentiiren entstanden betrachtet werden kann, hat man, da hier $M = 3y^2 - 4x^2$ und $N = 3x^2 - 8xy$ ist:

$$\left(\frac{dM}{dx}\right) = -8x; \ \left(\frac{dN}{dy}\right) = -8x$$

Da nun $\left(\frac{dM}{dx}\right) = \left(\frac{dN}{dy}\right)$, so ist die Gleichung (1) ein vollkommenes Differential, mithin die Integralgleichung:

$$\int(3y^2 - 4x^2)\,dy = y^3 - 4x^2y + \varphi(x) + c$$

Die Differentiation des gefundenen Integrals giebt:

$$(3y^2 - 4x^2)dy + [-8xy + \varphi'(x)]dx = 0 \cdots\cdots\cdots (3)$$

Diese Gleichung mit der Gleichung (2) verglichen, giebt:

$$\varphi'(x)dx = 3x^2dx$$
$$\varphi(x) = x^3$$

Die zu (1) oder (2) gehörige Integralgleichung ist mithin:

$$y^3 - 4x^2y + x^3 = c$$

280.

Beispiel 2. Die zu integrirende Differentialgleichung sei:

$$(2ay + bx + h)\,dy + (2ex + by + k)\,dx = 0 \cdots\cdots (1)$$

Auflösung. Hier zeigt sich wieder, dass $\left(\frac{dM}{dx}\right) = \left(\frac{dN}{dy}\right) = b$, daher:

$$\int (2ay + bx + h)\,dy = ay^2 + bxy + hy + \varphi(x) = c$$

Dies Integral wieder differentiirt, kommt:

$$(2ay + bx + h)\,dy + [by + \varphi'(x)]\,dx = 0$$

Dies Differential mit (1) verglichen, giebt:

$$\varphi'(x)\,dx = (2ex + k)\,dx$$
$$\varphi(x) = ex^2 + kx$$

Die gesuchte Integralgleichung ist also:

$$ay^2 + bxy + hy + ex^2 + kx = c$$

281.

Beispiel 3. Man integrire folgende Gleichung:

$$xdy - ydx = 0 \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (1)$$

Auflösung. Hier ist $\left(\frac{dM}{dx}\right) = 1$ und $\left(\frac{dN}{dy}\right) = -1$, die Gleichung (1) also kein vollkommenes Differential, daher auch nicht unmittelbar zu integriren. Multiplicirt man sie aber mit $\frac{1}{xy}$, so erhält man:

$$\frac{1}{y} \cdot dy - \frac{1}{x}dx = 0 \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (2)$$

In dieser Gleichung (2) ist nun $\left(\frac{dM}{dx}\right)=\left(\frac{dN}{dy}\right)=0$, dieselbe also jetzt ein vollkommenes Differential und ihr Integral:

$$ly - lx = lc$$

$$l\left(\frac{y}{x}\right) = lc$$

oder, indem man von den Logarithmen auf die Zahlen übergeht:

$$y = cx$$

Anmerkung. Hier wurde ein unvollkommenes Differential (1) durch Beifügung eines sogenannten integrirenden Factors $\left(\frac{1}{xy}\right)$ zu einem vollkommenen Differential gemacht. Dies hat nun schon frühe die Frage hervorgerufen, ob wohl auch in allen andern Fällen, wo eine Differentialgleichung kein vollkommenes Differential ist, dieselbe vermittelst eines integrirenden Factors darauf gebracht werden könne, und ob sich dieser Factor nach einer bestimmten Regel finden lasse. Euler, der sich mit dieser Untersuchung sehr viel beschäftigt hat, ist zu keinem erwünschten Resultate gelangt. Dass eine Differentialgleichung ein vollkommenes Differential wäre oder durch einen integrirenden Factor dazu gemacht werden könne, muss als reiner Zufall betrachtet werden, weshalb wir uns auch nicht länger hiebei aufhalten wollen.

282.

2. Methode. Durch Separation. Kann man die veränderlichen Grössen einer Differentialgleichung von einander sondern, so kann auch allemal die Integration der Gleichung nach den früheren Regeln der Integralrechnung bewirkt werden.

So folgt z. B. aus:

$$xdy = ydx$$

$$\frac{dy}{y} = \frac{dx}{x}$$

$$ly = lx + lc = lcx$$

$$y = cx$$

Beispiel. Aus $3xdy + ydx = 0$ folgt:

$$3\frac{dy}{y}+\frac{dx}{x}=0$$
$$3\,ly+lx=lc$$
$$ly^3x=lc$$
$$y^3x=c$$

283.

3. Methode. Durch Substitution. Die Separation gelingt immer durch Substitution einer dritten veränderlichen Grösse, wenn die Differentialgleichung eine homogene ist, d. h. wenn die Summe der Exponenten der veränderlichen Grössen in jedem Gliede dieselbe ist. Man habe z. B. die Gleichung:

$$x^2dx+y^2dx+xydy=0 \cdots\cdots\cdots\cdots(1)$$

Da hier die Summe der Exponenten in jedem Gliede $=2$, oder jeder Coefficient der Differentiale von gleich hohem (2ten) Grade ist, so ist die Gleichung (1) homogen. Man setze nun:

$y=tx$, mithin: $dy=xdt+tdx$, so ist:

$$x^2dx+t^2x^2dx+x^3tdt+x^2t^2dx=0$$
$$dx+t^2dx+xtdt+t^2dx=0$$
$$(1+2t^2)dx+xtdt=0$$
$$\frac{dx}{x}+\frac{tdt}{1+2t^2}=0$$
$$lx+\tfrac{1}{4}l(1+2t^2)=lc$$

Jetzt für t seinen Werth $\frac{y}{x}$ zurückgesetzt:

$$lx+\tfrac{1}{4}l\left(\frac{x^2+2y^2}{x^2}\right)=lc$$
$$lx+\tfrac{1}{4}l(x^2+2y^2)-\tfrac{1}{2}lx=lc$$
$$\tfrac{1}{2}lx+\tfrac{1}{4}l(x^2+2y^2)=lc$$
$$lx+\tfrac{1}{2}l(x^2+2y^2)=2lc$$
$$lx\cdot(x^2+2y^2)^{\frac{1}{2}}=lc^2$$
$$x\cdot\sqrt{x^2+2y^2}=c^2$$

284.

Aufgabe. Man integrire folgende Gleichung:

$$(x+y)dx+(y-x)dy=0.$$

Auflösung. Da diese Differentialgleichung homogen ist, so setze man wieder $y = tx$ etc., so erhält man:

$$\frac{dx}{x} + \frac{t-1}{1+t^2} \cdot dt = 0$$

$$\frac{dx}{x} + \frac{tdt}{1+t^2} = \frac{dt}{1+t^2}$$

$$lc + lx + \tfrac{1}{2} l(1+t^2) = \operatorname{arc} \operatorname{tg} t$$

$$lc + lx + l\left(1 + \frac{y^2}{x^2}\right)^{\frac{1}{2}} = \operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{y}{x}$$

$$lc \cdot (x^2 + y^2)^{\frac{1}{2}} = \operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{y}{x}$$

$$c\sqrt{x^2 + y^2} = e^{\operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{y}{x}}$$

285.

Auch in Fällen, wo die Differentialgleichung nicht homogen ist, gelingt die Integration oftmals durch passende Substitutionen. Man habe z. B. die Gleichung:

$$adx = (y - x) dy$$

Setzt man $y - x = u$, mithin: $dx = dy - du$, so ist:

$$ady - adu = udy$$

$$dy = \frac{adu}{a - u}$$

$$y = c - al(a - u)$$

$$y = c - al(a + x - y)$$

In Cauchy's leçons kommen viele künstliche Integrationen durch wiederholte Substitutionen vor.

286.

Eine hieher gehörende merkwürdige Integration gewährt noch eine zuweilen vorkommende Differentialgleichung von der Form:

$$dy + y \cdot \mathrm{F}(x) dx = f(x) dx$$

worin $\mathrm{F}(x)$ und $f(x)$ gewisse Functionen von x sind.

Diese Gleichung, welche sehr unpassend linear genannt wird, lässt sich auf verschiedene Weise integriren.

Betrachtet man y als Product zweier noch zu bestimmenden

unbekannten Functionen von x, die wir kurz mit t und z bezeichnen wollen und setzen also:

$$y = tz, \text{ mithin: } dy = zdt + tdz, \text{ so ist:}$$
$$zdt + tdz + tzF(x)dx = f(x)dx$$
$$[tdz + tz \cdot F(x) \cdot dx] + [zdt - f(x)dx] = 0.$$

Dieser Gleichung wird offenbar Genüge geleistet, wenn jeder der eingeklammerten Theile für sich $= 0$ ist. Dies giebt uns zur Bestimmung der beiden Functionen t und z die beiden Bedingungsgleichungen:

$$tdz + tz \cdot F(x) \cdot dx = 0 \qquad zdt - f(x) \cdot dx = 0$$
$$\frac{dz}{z} = -F(x)dx \qquad dt = \frac{f(x)dx}{z}$$
$$lz = -\int F(x)dx \qquad dt = \frac{f(x)dx}{e^{-\int F(x)dx}}$$
$$z = e^{-\int F(x)dx} \qquad t = \int f(x)dx \cdot e^{\int F(x)dx}$$
$$y = e^{-\int F(x)dx} \cdot \int f(x)dx \cdot e^{\int F(x)dx}$$

II. Differentialgleichungen erster Ordnung höhern Grades.

287.

Wegen der Schwierigkeiten, welche die Auflösung der höhern Gleichungen verursacht, müssen wir uns hier auf die Integration der Differentialgleichungen zweiten Grades (§ 277) beschränken, um so mehr, da schon diese oft mit grossen Schwierigkeiten verbunden ist. Von den Methoden, welche man hier aufgestellt hat, merke man sich folgende drei:

288.

1. Methode. Indem man die Wurzeln sucht, d. h. auf den Differentialquotienten reducirt. Man habe z. B. folgende Differentialgleichung zweiten Grades:

$$dy^2 - ax\,dx^2 = 0, \text{ so ist:}$$
$$\frac{dy^2}{dx^2} = ax$$
$$\frac{dy}{dx} = \pm\sqrt{ax}$$
$$dy - \sqrt{ax} \cdot dx = 0; \qquad dy + \sqrt{ax} \cdot dx = 0.$$

Die vorgegebene Differentialgleichung zerfällt also in zwei verschiedene, deren Product sie ist. Es müssen also auch zwei Integralgleichungen ihr Genüge leisten. Diese sind hier:

$$y - \tfrac{2}{3}a^{\frac{1}{2}}x^{\frac{3}{2}} + c_1 = 0; \qquad y + \tfrac{2}{3}a^{\frac{1}{2}}x^{\frac{3}{2}} + c_2 = 0.$$

Beide Gleichungen lassen sich aber auch, wenn man will, in eine einzige, gleichsam allgemeinere Integralgleichung, zusammenfassen, nämlich (höhere Geometrie Pag. 26, 4):

$$(y - \tfrac{2}{3}a^{\frac{1}{2}}x^{\frac{3}{2}} + c_1)(y + \tfrac{2}{3}a^{\frac{1}{2}}x^{\frac{3}{2}} + c_2) = 0,$$

oder auch, weil die Constanten beliebig sind, also auch gleich sein können $c_1 = c_2 = c$:

$$(y + c - \tfrac{2}{3}a^{\frac{1}{2}}x^{\frac{3}{2}})(y + c + \tfrac{2}{3}a^{\frac{1}{2}}x^{\frac{3}{2}}) = 0$$
$$(y + c)^2 = \tfrac{4}{9}ax^3.$$

Anmerkung. Es ist klar, dass eine Differentialgleichung erster Ordnung $n$ten Grades im Allgemeinen n verschiedene Wurzeln hat, mithin auch n verschiedene Integralgleichungen, so wie auch deren Product ihr Genüge leisten müssen. Die n Wurzeln zu finden, gelingt aber selten, und wenn man sie auch hat, noch seltener die Integration derselben.

289.

2. Methode. Wenn die Coefficienten der Differentiale blosse Functionen von einer und derselben veränderlichen Grösse, z. B. von x sind. Alsdann kann man auch, $\frac{dy}{dx} = p$ gesetzt, die Differentialgleichung auf x reduciren und x als Function von p ausdrücken. Angenommen, es sei:

$$x = \varphi(p) \cdots\cdots (1)$$

Weil nun $\frac{dy}{dx} = p$, mithin:

$$dy = pdx \cdots\cdots (2)$$

so giebt letztere Gleichung integrirt (§ 201):

$$y = px - \int xdp \cdots\cdots (3)$$

Setzt man in (3) statt x seinen Werth aus (1), so ist:

$$y = p \cdot \varphi(p) - \int \varphi(p)dp + c \cdots\cdots (4)$$

Lässt sich nun die in (4) angedeutete Integration wirklich ausführen und dann aus (1) und (4) p eliminiren, so hat man eine oder mehrere primitive Gleichungen zwischen x, y.

290.

3. Methode. Durch Differentiation, wenn die Differentialgleichung sich zufällig auf die Form:

$$y = px + \varphi(p) \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (1)$$

bringen lässt, wo $p = \frac{dy}{dx}$ und $\varphi(p)$ irgend eine Function von p ist. Denn differentiirt man die Gleichung (1), so kommt:

$$dy = pdx + xdp + \varphi'(p)dp$$

oder weil $dy = pdx$ ist:

$$[x + \varphi'(p)] \cdot dp = 0 \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (2)$$

Dieser Gleichung kann auf zweierlei Weise Genüge geleistet werden, nämlich für:

$$dp = 0 \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (3)$$

$$x + \varphi'(p) = 0 \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (4)$$

Aus (3) folgt durch Integration $p = c$. Substituiren wir diese für p gefundene Constante c, welche offenbar ganz willkürlich ist, in (1), so haben wir eine der Differentialgleichung (1) entsprechende Integralgleichung zwischen x, y und der willkürlichen Constante c, nämlich:

$$y = cx + \varphi(c) \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (5)$$

Reduciren wir dagegen (4) auf p, so erhalten wir p als Function von x; angenommen, es sei $p = \psi(x)$. Wird nun auch dieser Werth (Werthe) von p in (1) substituirt, so erhalten wir noch eine andere (mehrere) der Gleichung (1) Genüge leistende Gleichung zwischen x und y nämlich:

$$y = x \cdot \psi(x) + \varphi[\psi(x)] \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (6)$$

welche aber aus dem Grunde kein wirkliches Integral der Gleichung (1) genannt werden kann, weil sie keine willkürliche Constante enthält, die zu jedem Integrale erforderlich ist.

Alle solche ohne Integration gefundenen Gleichungen, welche einer Differentialgleichung Genüge leisten, nennt man

besondere Auflösungen, zur Unterscheidung von den durch wirkliches Integriren gefundenen Integralgleichungen. (Wir werden im nächsten Buche diesen merkwürdigen besondern Auflösungen eine geometrische Bedeutung unterbreiten.)

291.

Aufgabe. Man integrire folgende Differentialgleichung:

$$ydx - xdy = a\sqrt{dx^2 + dy^2}$$

Auflösung. Hier lässt sich am besten die 3. Methode anwenden. Man hat nämlich:

$$y = px + a\sqrt{1 + p^2} \dots\dots\dots\dots (1)$$

$$dy = pdx + xdp + \frac{ap}{\sqrt{1 + p^2}} \cdot dp$$

$$\left(x + \frac{ap}{\sqrt{1 + p^2}}\right) \cdot dp = 0 \dots\dots\dots\dots (2)$$

Aus $dp = 0$ folgt: $p = c$ und in (1) substituirt, die Integralgleichung:

$$y = cx + a\sqrt{1 + c^2} \dots\dots\dots\dots (1)$$

Aus $x + \frac{ap}{\sqrt{1 + p^2}} = 0$, folgt: $p = \pm \frac{x}{\sqrt{a^2 - x^2}}$ und in (1) substituirt, als besondere Auflösung:

$$y = \sqrt{a^2 - x^2} \dots\dots\dots\dots (2)$$

III. Differentialgleichungen höherer Ordnungen.

292.

Es ist wohl vorauszusehen, dass die Integration der Differentialgleichungen höherer Ordnungen noch bedeutend schwieriger sein muss, als die der ersten Ordnung. In der That giebt es auch hier nur sehr wenige und ganz besondere Fälle, wo die Integration möglich ist. Die wichtigsten dieser besondern Art Gleichungen (von denen die Mechanik einige aufgestellt hat) wollen wir hier in einer schicklichen Ordnung folgen lassen. Der Kürze und des leichtern Ueberblicks halber, bezeichnen wir die Differential-Quotienten $\frac{dy}{dx}$, $\frac{d^2y}{dx^2}$ .... wie üblich mit $p, q, r, \cdots$, so dass also:

$$\frac{dy}{dx} = p; \quad \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{dp}{dx} = q; \quad \frac{d^3y}{dx^3} = \frac{dq}{dx} = r; \text{ etc.}$$

293.

1. Fall. Wenn ein Differential-Quotient sich als Function des nächst vorhergehenden darstellen lässt:

$$\frac{d^ny}{dx^n} = \varphi\left(\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}}\right)$$

Alsdann drücke man den höchsten Differential-Quotienten als Function des nächst vorhergehenden aus etc., bis man, wie folgende Beispiele zeigen, auf eine primitive Gleichung zwischen x und y kommt, indem wir auch hier wieder x als die unabhängig veränderliche betrachten.

294.

Aufgabe 1. Man integrire folgende Gleichung:

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \varphi\left(\frac{dy}{dx}\right)$$

Auflösung. Hier ist: $q = \varphi(p)$, also $\frac{dp}{dx} = \varphi(p)$, folglich:

$$dx = \frac{dp}{\varphi(p)}$$

$$x = \int \frac{dp}{\varphi(p)} + c, \dots\dots\dots\dots (1)$$

Ferner ist $dy = pdx$, und hierin den Werth von dx gesetzt:

$$dy = \frac{pdp}{\varphi(p)}$$

$$y = \int \frac{pdp}{\varphi(p)} + c_2 \dots\dots\dots\dots (2)$$

Lassen sich nun beide angedeutete Integrationen ausführen, so erhält man durch Elimination des Differential-Quotienten p aus (1) und (2) – vorausgesetzt, dass auch diese Elimination möglich ist – die verlangte Gleichung zwischen x, y und den beiden Constanten c_1 und c_2.

295.

Aufgabe 2. Man integrire die Gleichung:

$$\frac{d^3y}{dx^3} = \varphi\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)$$

Auflösung. Hier ist $r = \varphi(q)$, also $\frac{dq}{dx} = \varphi(q)$, mithin:

$$dx = \frac{dq}{\varphi(q)}$$

$$x = \int \frac{dq}{\varphi(q)} + c_1 \cdots\cdots\cdots\cdots (1)$$

Ferner $dp = qdx = q \cdot \frac{dq}{\varphi(q)}$, mithin:

$$p = \int \frac{qdq}{\varphi(q)} + c_2$$

Ferner $dy = p \cdot dx = \frac{dq}{\varphi(q)} \left\{ \int \frac{qdq}{\varphi(q)} + c_2 \right\}$ mithin:

$$y = \int \frac{dq}{\varphi(q)} \left\{ \int \frac{qdq}{\varphi(q)} + c_2 \right\} + c_3 \cdots\cdots (2)$$

Aus (1) und (2) muss nun q eliminirt werden, um die Gleichung zwischen x und y zu erhalten.

Anmerkung. Cauchy stellt noch höhere Differential-Quotienten auf (leçons, pag. 649 etc.).

296.

Beispiel. Man integrire die Gleichung:

$$d^2y = dx\sqrt{dx^2 + dy^2}$$

Auflösung. Man hat hier zuerst:

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \sqrt{1 + \frac{dy^2}{dx^2}}$$

$$q = \sqrt{1 + p^2}$$

$$\frac{dp}{dx} = \sqrt{1 + p^2}$$

$$dx = \frac{dp}{\sqrt{1 + p^2}}$$

$$x = c_1 + l(p + \sqrt{1 + p^2}) \cdots\cdots\cdots \quad \cdots (1)$$

$$dy = pdx = \frac{pdp}{\sqrt{1 + p^2}}$$

$$y = c_2 + \sqrt{1 + p^2} \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (2)$$

$$p = \sqrt{(y - c_2)^2 - 1}$$

$$x = c_1 + l\left[y - c_2 + \sqrt{(y - c_2)^2 - 1}\right]$$

297.

2. Fall. Wenn ein Differential-Quotient als Function des vorvorhergehenden gegeben ist:

$$\frac{d^n y}{dx^n} = \varphi\left(\frac{d^{n-2}y}{dx^{n-2}}\right)$$

Dann benutze man die aus § 292 durch Elimination von dx folgenden Gleichungen:

$$p\frac{dp}{dy} = q; \qquad q\frac{dq}{dp} = r; \text{ etc. etc.}$$

298.

Aufgabe 1. Man integrire zuerst folgende Gleichung:

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \varphi(y)$$

Auflösung. Man hat hier $q = \varphi(y)$, mithin:

$$p\frac{dp}{dy} = \varphi(y)$$

$$pdp = \varphi(y)dy$$

$$\tfrac{1}{2}p^2 = \int \varphi(y)dy$$

$$p = \sqrt{\left[2\int \varphi(y)\,dy\right]}$$

$$\frac{dy}{dx} = \sqrt{2\int \varphi(y)\,dy}$$

$$dx = \frac{dy}{\sqrt{2\int \varphi(y)\,dy}}$$

$$x = \int \frac{dy}{\sqrt{2\int \varphi(y)\,dy}}$$

299.

Aufgabe 2. Man integrire folgende Gleichung:

$$\frac{d^3y}{dx^3} = \varphi\left(\frac{dy}{dx}\right)$$

Auflösung. Hier ist:

$$q\frac{dq}{dp} = \varphi(p)$$

$$qdq = \varphi(p)dp$$

$$\tfrac{1}{2}q^2 = \int\varphi(p)dp$$

$$q = \sqrt{2\int\varphi(p)dp}$$

$$\frac{dp}{dx} = \sqrt{2\int\varphi(p)dp}$$

$$dx = \frac{dp}{\sqrt{2\int\varphi(p)dp}}$$

$$x = \int\frac{dp}{\sqrt{2\int\varphi(p)dp}} \cdots\cdots (1)$$

$$dy = pdx = \frac{pdp}{\sqrt{2\int\varphi(p)dp}}$$

$$y = \int\frac{pdp}{\sqrt{2\int\varphi(p)dp}} \cdots\cdots (2)$$

Aus (1) und (2) muss nun p eliminirt werden.

300.

3. **Fall.** Wenn $\frac{d^2y}{dx^2} = \varphi\left(x, \frac{dy}{dx}\right)$, so setze $q = \frac{dp}{dx}$ und wenn $\frac{d^2y}{dx^2} = \varphi\left(y, \frac{dy}{dx}\right)$, so setze $q = p\frac{dp}{dy}$.

Beispiel. Es sei:

$$xd^2y = dxdy + x^2dx^2$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{1}{x}\cdot\frac{dy}{dx} + x$$

$$q = \frac{1}{x}\cdot p + x$$

$$\frac{dp}{dx} = \frac{p}{x} + x$$

$$xdp = pdx + x^2dx$$

$$\frac{xdp - pdx}{x^2} = dx$$

$$\frac{p}{x} = x + c_1$$

$$\frac{dy}{dx} = x^2 + c_1x$$

$$y = \tfrac{1}{3}x^3 + \tfrac{1}{2}c_1x^2 + c_2$$

Einundzwanzigstes Buch.

Bestimmung krummer Linien aus gegebenen Eigenschaften.

301.

Aus der Gleichung einer krummen Linie kann man, durch Hülfe der Differential-Rechnung, Eigenschaften derselben finden, z. B. Maxima und Minima der Ordinaten, Wendungspuncte, Länge der Subtangente etc. Umgekehrt kann man auch aus Eigenschaften einer krummen Linie, die durch Differentialgleichungen gegeben sind, die krumme Linie selbst, d. h. ihre Gleichung finden, wie folgende Beispiele zeigen werden.

302.

Aufgabe 1. Eine krumme Linie zu finden, deren Subtangente immer gleich dem *m*fachen der Abscisse ist.

Auflösung. Zufolge § 49 ist die Formel für die Subtangente: $y \cdot \frac{dx}{dy} = S_{t}$, mithin muss sein:

$$y\frac{dx}{dy} = mx$$

$$m\frac{dy}{y} = \frac{dx}{x}$$

$$mly = lx + lc = lcx$$

$$y^m = cx$$

303.

Aufgabe 2. Die krumme Linie anzugeben, deren Subnormale gleich der Abscisse ist.

Auflösung. Aus $S_n = y\dfrac{dy}{dx} = x$ folgt:

$$y^2 + 2c = x^2 \text{ oder } 2c = a^2 \text{ gesetzt,}$$
$$y = \sqrt{x^2 - a^2}$$

304.

Aufgabe 3. Eine Linie von der Beschaffenheit zu finden, dass das Quadrat der Subtangente gleich dem Product aus der Abscisse und einer constanten Grösse, a, ist.

Auflösung. Man hat hier:

$$y^2\frac{dx^2}{dy^2} = ax$$
$$\frac{dy}{y} = \frac{dx}{\sqrt{ax}}$$
$$ly - lc = 2\sqrt{\frac{x}{a}}$$
$$y = c \cdot e^{2\sqrt{\frac{x}{a}}}$$

305.

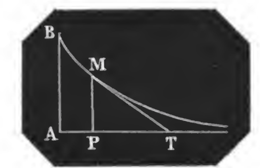
Aufgabe 4. Die krumme Linie zu finden, deren Subtangente gleich dem Ueberschuss der Ordinate über die Abscisse ist.

Auflösung. Aus $y\dfrac{dx}{dy} = y - x$ folgt:

$$ydx = (y - x)\,dy$$

Setzt man $x = ty$, mithin: $dx = ydt + tdy$, so ist:

$$\frac{dy}{y} + \frac{dt}{2t - 1} = 0$$
$$ly + \tfrac{1}{2}l(2t - 1) = lc$$
$$ly + \tfrac{1}{2}l\left(\frac{2x - y}{y}\right) = lc$$
$$ly^2 + l\left(\frac{2x - y}{y}\right) = lc^2$$
$$l(2xy - y^2) = lc^2$$
$$2xy - y^2 = c^2$$



306.

Aufgabe 5. Eine krumme Linie von der Beschaffenheit zu finden, dass die Tangenten für alle Puncte derselben gleich lang, $= a$, sind.

Auflösung. Zufolge § 49 ist:

$$y\sqrt{1+\frac{dx^2}{dy^2}} = a$$

$$dx = \frac{\sqrt{a^2-y^2}}{y}\,dy$$

Setze $\sqrt{a^2-y^2} = ty$, so ist: $y = \frac{a}{\sqrt{1+t^2}}$ und

$$x = \int t dy = ty - \int y dt$$

$$x = ty - a\int\frac{dt}{\sqrt{1+t^2}}$$

$$x = ty - al(t+\sqrt{1+t^2}) + c$$

$$x = \sqrt{a^2-y^2} - al\left(\frac{a+\sqrt{a^2-y^2}}{y}\right) + c$$

Nehmen wir die Constante (weil sie ja beliebig ist) so, dass für $x = 0$, $y = a$ wird, so ist $c = 0$ und dann:

$$x = \sqrt{a^2-y^2} - al\left(\frac{a+\sqrt{a^2-y^2}}{y}\right)$$

Diese krumme Linie wird die tractoria genannt. Man kann sie sich nämlich entstanden denken, indem das Ende A einer unbiegsamen gewichtslosen graden Linie, $AB = a$, dessen Endpunct B aber schwer ist, längs der Abscissenlinie fortgezogen wird, alsdann wir der schwere Endpunct B mit fortgezogen und — da die augenblickliche Richtung in seiner Bewegung immer die Tangente ist — die tractoria beschreiben. *)

*) Ein in England etablirter Frankfurter Mechanicus soll Hähne, Zapfen und Achsen nach der tractoria construirt und darauf ein Patent genommen haben.

Sucht man die Fläche der tractoria, so folgt aus $dz = y dx$ (§ 217), wenn man hierin für dx seinen Werth setzt:

$$dz = -\sqrt{a^2 - y^2} \cdot dy$$

Wir müssen das Differential hier negativ nehmen, weil wir die Fläche z als Function der Ordinate y betrachten und z, wie die Figur zeigt, mit wachsender Ordinate abnimmt. Dieser Umstand ist jedesmal zu berücksichtigen, wo mit dem Wachsen der absolut veränderlichen Grösse, das davon abhängige Quantum, statt auch zu wachsen, umgekehrt abnimmt. Wäre z. B. für vorliegenden Fall $z = F(y)$, so müsste doch, weil nur mit abnehmenden Ordinaten z wächst, für $y + \Delta y$ das Wachsthum von z, nämlich: $\Delta z = F(y + \Delta y) - F(y)$ negativ und mithin auch das Differential von z negativ sein, daher:

$$dz = -\sqrt{a^2 - y^2} \cdot dy$$

$$z = -\int \sqrt{a^2 - y^2} dy + c \text{ und (§ 226)}$$

$$z = -\tfrac{1}{2} y \sqrt{a^2 - y^2} - \tfrac{1}{2} a^2 \arcsin \frac{y}{a} + c$$

Soll die Fläche von AB angerechnet werden, mithin für $y = a = AB$, $z = 0$ sein, so ist:

$$0 = 0 - \tfrac{1}{2} a^2 \cdot \frac{\pi}{2} + c$$

$$z = \frac{a^2}{4} \pi - \tfrac{1}{2} y \sqrt{a^2 - y^2} - \tfrac{1}{2} a^2 \cdot \arcsin \frac{y}{a}$$

Setzt man hierin $y = 0$, so hat man für die ganze, sich an der unendlichen Asymptote hin erstreckende Fläche den Ausdruck: $z = \frac{a^2 \pi}{4}$, d. i. den vierten Theil der mit dem Radius $BA = a$ beschriebenen Kreisfläche.

307.

Aufgabe 6. Man sucht eine krumme Linie, in welcher die Tangente der Quadratwurzel aus der Ordinate proportional wächst.

Auflösung. Man hat hier:

$$y \sqrt{1 + \frac{dx^2}{dy^2}} = \sqrt{ay}$$

$$dx = \sqrt{\frac{a - y}{y}} \cdot dy$$

Setze $\sqrt{\frac{a-y}{y}}=t$, also $y=\frac{a}{1+t^2}$, so findet man:

$$x=\sqrt{ay-y^2}-a\operatorname{arctg}\sqrt{\frac{a-y}{y}}+c$$

Bestimmt man die ganz willkürliche Constante so, dass für $y=a$, $x=0$ wird, so ist $c=0$.

308.

Aufgabe 7. Man sucht die krumme Linie, bei welcher das vom Anfangspunct A auf die jedesmalige Tangente gefällte Perpendikel gleich der Abscisse des Berührungspuncts ist.

Auflösung. Ist S_t die Subtangente, τ der Berührungswinkel, also $\sin\tau=\frac{dy}{ds}$ (§ 70), so hat man:

$$\pm(S_t-x)\sin\tau=x$$

$$\pm\left(y\frac{dx}{dy}-x\right)\frac{dy}{ds}=x$$

$$(ydx-xdy)^2=x^2ds^2=x^2(dx^2+dy^2)$$

$$(x^2-y^2)dx+2xydy=0\cdots\cdots\cdots\cdots(1)$$

Diese Gleichung ist homogen und nach § 284 zu integriren. Durch einen kleinen, manchmal anwendbaren Kunstgriff erhält man hier aber das Integral kürzer so: Aus (1) folgt:

$$x^2dx-y^2dx+2xydy=0$$

$$dx+\frac{2xydy-y^2dx}{x^2}=0$$

Das zweite Glied ist offenbar das Differential von $\frac{y^2}{x}$, folglich, indem man die Constante mit $2a$ bezeichnet:

$$x+\frac{y^2}{x}=2a$$

$$y=\sqrt{2ax-x^2}$$

309.

Aufgabe 8. Es wird die krumme Linie verlangt, bei welcher die Tangente immer gleich ist der vom Anfangspunct nach dem Berührungspunct gezogenen Linie.

Auflösung. Man hat hier:

$$y\sqrt{1+\frac{dx^2}{dy^2}}=\sqrt{x^2+y^2}$$

$$y\frac{dx}{dy}=\pm x$$

$$\frac{dy}{y}\mp\frac{dx}{x}=0$$

$$ly\mp lx=lc$$

Für das obere Zeichen ist $y=cx$. Für das untere Zeichen $xy=c$.

310.

Aufgabe 9. Man sucht die vom Anfangspunct ausgehende krumme Linie, deren vom Bogen, Abscisse und Ordinate begrenzte Fläche gleich Zweidrittel des aus der Abscisse und Ordinate gebildeten Rechtecks ist.

Man hat hier (§ 217):

$$\int ydx=\tfrac{2}{3}xy$$

$$ydx=\tfrac{2}{3}ydx+\tfrac{2}{3}xdy$$

$$2\frac{dy}{y}=\frac{dx}{x}$$

$$2\,ly=lx+lc$$

$$y^2=cx$$

311.

Aufgabe 10. Eine vom Anfangspunct ausgehende krumme Linie zu finden, deren quadrirte Länge gleich dem Product aus der Abscisse und einer constanten Grösse, a, ist. In Zeichen:

$$s^2=ax$$

Auflösung. Es ist: $2sds=adx$

$$ds=\frac{adx}{2s}$$

$$\sqrt{\left(1+\frac{dy^2}{dx^2}\right)}\cdot dx=\frac{adx}{2\sqrt{ax}}$$

$$dy=\sqrt{\frac{a-4x}{4x}}\cdot dx$$

Setze $\sqrt{\frac{a-4x}{4x}} = t$, also $x = \frac{\frac{1}{4}a}{1+t^2}$, so ist:

$$y = \tfrac{1}{2}\sqrt{ax-4x^2} - \tfrac{1}{4}a \operatorname{arc\,tg} \sqrt{\frac{a-4x}{4x}} + c$$

oder (Trigonometrie § 100, 6):

$$y = \tfrac{1}{2}\sqrt{ax-4x^2} - \tfrac{1}{4}a \arccos \sqrt{\frac{4x}{a}} + c$$

Da nun für $x=0$ auch $y=0$ sein soll, so ist $c = \frac{1}{4}a \cdot \frac{1}{2}\pi$. Daher:

$$y = \tfrac{1}{2}\sqrt{ax-4x^2} + \tfrac{1}{4}a\left(\tfrac{1}{2}\pi - \arccos\sqrt{\frac{4x}{a}}\right)$$

oder weil allgemein $\arcsin u + \arccos u = \frac{1}{2}\pi$, mithin: $\frac{1}{2}\pi - \arccos u = \arcsin u$, so ist kürzer:

$$y = \tfrac{1}{2}\sqrt{ax-4x^2} + \tfrac{1}{4}a \arcsin \sqrt{\frac{4x}{a}}$$

312.

Vorhergehende und ähnliche Aufgaben, wo nämlich die Länge eines Bogens als Function der Abscisse gegeben ist, lassen sich oftmals leichter auf folgende, zuerst von Tortolini gezeigte Weise lösen. (Cauchy's leçons T. II. p. 115.) Es folgt aus:

$$s = \sqrt{ax}$$

$$\frac{ds}{dx} = \tfrac{1}{2}\sqrt{\frac{a}{x}} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (1)$$

Nennt man θ den Winkel, den die am Endpunct M des Bogens AM $= s$ gelegte Berührungslinie mit der Ordinatenrichtung bildet, so ist (§ 79):

$$\frac{dx}{ds} = \sin\theta \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (2)$$

Aus (1) und (2) folgt: $1 = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{a}{x}} \cdot \sin\theta$, und hieraus:

$$x = \tfrac{1}{4}a \sin^2\theta \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (3)$$

$$dx = \tfrac{1}{2}a \sin\theta \cdot \cos\theta \cdot d\theta$$

Ferner hat man: $\frac{dy}{dx} = \cot\theta$, also:

$$dy = \cot\theta \cdot dx$$
$$dy = \tfrac{1}{2}a\cos^2\theta \cdot d\theta$$
$$dy = \tfrac{1}{2}a(\tfrac{1}{2}\cos 2\theta + \tfrac{1}{2})d\theta$$
$$y = \frac{a}{8}\sin 2\theta + \frac{a}{4}\cdot\theta \cdots\cdots\cdots \cdots\cdots (4)$$

Weil für $x = 0$, $\theta = 0$ ist und auch $y = 0$ sein soll, so ist hier keine Constante nöthig.

Aus (3) folgt $\sin\theta = \sqrt{\frac{4x}{a}}$, mithin ist: $\cos\theta = \sqrt{\left(\frac{a-4x}{a}\right)}$ und $\sin 2\theta = 2\sin\theta\cdot\cos\theta = 2\sqrt{\frac{4x}{a}}\cdot\sqrt{\left(\frac{a-4x}{a}\right)}$, daher:

$$y = \tfrac{1}{2}\sqrt{ax - 4x^2} + \frac{a}{4}\operatorname{arc}\sin\sqrt{\frac{4x}{a}}$$

Setzt man in den beiden Gleichungen:

$$x = \tfrac{1}{4}a\sin^2\theta$$
$$y = \tfrac{1}{8}a\sin 2\theta + \tfrac{1}{4}a\,\theta$$

$2\theta = \omega$ und $\frac{1}{8}a = r$, mithin: $\sin^2\theta = \sin^2\frac{1}{2}\omega = \frac{1}{2}(1 - \cos\omega)$, so hat man:

$$x = r - r\cos\omega$$
$$y = r\,\omega + r\sin\omega.$$

Die gesuchte krumme Linie ist also die bekannte Cycloide.

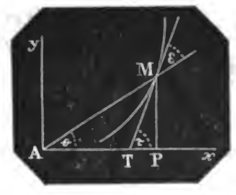
313.

Erklärung. Wenn man in einer Gleichung zweier veränderlichen Grössen, x, y, und einer Constanten, a, dieser Constanten alle möglichen Werthe beilegt und für jeden dieser Werthe die entsprechende krumme Linie über derselben Abscissenlinie und für denselben Anfangspunct construirt denkt, so erhält man (im Allgemeinen) ein System von krummen Linien derselben Art. Denkt man sich noch eine andere Linie, welche jenes System, d. h. jede besondere Linie, nach einem gegebenen Gesetze schneidet, z. B. alle unter demselben Winkel, so wird die schneidende Linie eine Trajectorie genannt.*)

*) Jean Bernouilli hat zuerst (1697) die Theorie der Trajectorieen, die sich offenbar auch auf Flächen ausdehnen lässt, aufgestellt. Er wurde durch die von Huyghens aufgestellte Ansicht, dass die Fortpflanzung des Lichts in einer wellenförmigen Bewegung des Aethers bestehe, darauf geführt.

314.

Aufgabe 11. Es sei $\beta = m\alpha$ die Gleichung einer graden Linie, indem α die laufende Abscisse und β die Ordinate bezeichnet. Lässt man den Coefficienten m sich ändern, so erhält man eine vom Anfangspunct ausgehende Folge von graden Linien. Man suche die Trajectorie $y = \varphi(x)$, welche alle unter einem gegebenen Winkel, $= \varepsilon$, durchschneidet.



Auflösung. Es sei M ein Punct der Trajectorie, dessen Abscisse AP $= x$ und Ordinate MP $= y$. Der Winkel, welchen die durch M an die Trajectorie gelegte Tangente mit der Abscissenachse macht, $= \tau$ und der Winkel MAP $= \theta$, so ist erstlich $\varepsilon = \tau - \theta$ und

$$\operatorname{tg}\varepsilon = \frac{\operatorname{tg}\tau - \operatorname{tg}\theta}{1 + \operatorname{tg}\tau \cdot \operatorname{tg}\theta}$$

Aus der gegebenen Gleichung der graden Linie $\beta = m\alpha$ folgt: $\frac{d\beta}{d\alpha} = m \operatorname{tg}\theta$ und da $\operatorname{tg}\tau = \frac{dy}{dx}$, so ist:

$$\operatorname{tg}\varepsilon = \frac{\frac{dy}{dx} - m}{1 + m\frac{dy}{dx}}$$

Da nun aber für den Punct M, $\alpha = x$ und $\beta = y$ und der Coefficient m, welcher zu dieser besondern graden Linie AM gehört, $= \frac{\beta}{\alpha}$ ist, wie aus der Gleichung $\beta = m\alpha$ folgt, so ist:

$$\operatorname{tg}\varepsilon = \frac{\frac{dy}{dx} - \frac{\beta}{\alpha}}{1 + \frac{\beta}{\alpha} \cdot \frac{dy}{dx}}$$

oder, weil für den Punct M auch x, y statt α, β gesetzt werden kann, und, wenn man, Kürze halber, $\operatorname{tg}\varepsilon = a$ setzt:

$$a = \frac{\frac{dy}{dx} - \frac{y}{x}}{1 + \frac{y}{x} \cdot \frac{dy}{dx}} = \frac{xdy - ydx}{xdx + ydy} \cdots\cdots\cdots (1)$$

die Differentialgleichung der gesuchten Trajectorie, *) welche, weil homogen, integrirt werden kann.

$$axdx + aydy = xdy - ydx$$

Setze $y = tx$ mithin $dy = xdt + tdx$

$$a\frac{dx}{x} = \frac{dt}{1+t^2} - \frac{at}{1+t^2}dt$$

$$alx = \text{arc tg}\, t - \tfrac{1}{2}al(1+t^2) + c$$

$$alx = \text{arc tg}\,\frac{y}{x} - \tfrac{1}{2}al\left(\frac{x^2+y^2}{x^2}\right) + c$$

oder weil $\tfrac{1}{2}al\left(\frac{x^2+y^2}{x^2}\right) = al(x^2+y^2)^{\frac{1}{2}} - alx$

$$al(x^2+y^2)^{\frac{1}{2}} = \text{arc tg}\,\frac{y}{x} + c$$

Weil die Constante beliebig ist, so setze man $c = 0$ und statt rechtwinkliger Coordinaten Polarcoordinaten, nämlich $\sqrt{x^2+y^2} = r$ und $\text{arc tg}\,\frac{y}{x} = \theta$, so ist: $alr = \theta$, also:

$$r^a = e^\theta$$

Soll der Winkel $\varepsilon = 45^0$ sein, so ist $a = 1$, mithin (§ 74):

$$r = e^\theta\,.$$

Soll $\varepsilon = 90^0$ sein, so ist $a = \infty$. Aus (1) folgt dann:

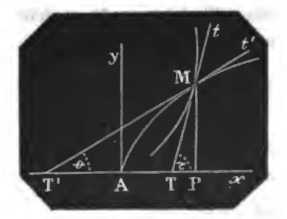
$$xdx + ydy = 0$$
$$x^2 + y^2 = a^2.$$

315.

Aufgabe 12. Es sei $\mathfrak{y}^2 = p\alpha$ die Gleichung der gewöhnlichen Parabel mit dem unbestimmten Parameter p. Giebt man diesem Parameter alle möglichen Werthe von $p = 0$ bis $p = \infty$, so erhält man eine Folge von Parabeln, die alle denselben Scheitel haben und wovon die Achsen die beiden äussersten Parabeln sind. Man sucht die Trajectorie, welche alle Parabeln unter demselben Winkel ε schneidet.

---

*) Die Differentialgleichungen der Trajectorieen sind also vom ersten Grade und erster Ordnung.



Auflösung. Es sei M ein Punct der fraglichen Trajectorie, $AP = x$, $MP = y$. Es sei Tt die Tangente der Trajectorie für den Punct M und $T't'$ die Tangente an der entsprechenden, durch denselben Punct gehenden Parabel.

Nun ist zuvörderst wieder $\varepsilon = \tau - \theta$, also:

$$\operatorname{tg}\varepsilon = \frac{\operatorname{tg}\tau - \operatorname{tg}\theta}{1 + \operatorname{tg}\theta \cdot \operatorname{tg}\tau}$$

Nun ist $\operatorname{tg}\tau = \frac{dy}{dx}$, $\operatorname{tg}\theta = \frac{d\beta}{d\alpha}$ und aus $\beta^2 = p\alpha$ folgt: $\frac{d\beta}{d\alpha} = \frac{p}{2\beta}$

$$\operatorname{tg}\varepsilon = \frac{\frac{dy}{dx} - \frac{p}{2\beta}}{1 + \frac{p}{2\beta} \cdot \frac{dy}{dx}} \dots\dots\dots$$

Da nun aber für den Punct M die Coordinaten der hindurch gehenden Parabel und der Trajectorie gleich sind $\alpha = x$, $\beta = y$, und der dieser besondern Parabel entsprechende Parameter (wie aus $\beta^2 = p\alpha$) folgt, nämlich: $p = \frac{\beta^2}{\alpha}$, also auch für jeden Punct $M(x, y)$ der Trajectorie immer $p = \frac{y^2}{x}$ ist, so kann man, weil der Punct M ganz unbestimmt gelassen, d. h. weil dieselben Schlüsse für jeden andern Punct der Trajectorie und der dadurch gehenden besondern Parabel gelten, die veränderliche Constante p eliminiren und hat dann für die, die Trajectorie bestimmende Differentialgleichung:

$$\operatorname{tg}\varepsilon = \frac{\frac{dy}{dx} - \frac{y}{2x}}{1 + \frac{y}{2x} \cdot \frac{dy}{dx}} = \frac{2xdy - ydx}{2xdx + ydy}$$

Soll $\varepsilon = 90^0$ sein, so ist $\operatorname{tg}\varepsilon = \infty$ und

$$ydy + 2xdx = 0$$
$$y^2 + 2x^2 = c$$

316.

Aufgabe 13. Die Trajectorie zu finden, welche alle über

einer gemeinschaftlichen Achse construirten Parabeln so schneidet, dass die Flächeninhalte zwischen jedem Parabelbogen und den Coordinaten des Endpuncts $(= a^2)$ sind.

Auflösung. Sei M(x, y) ein Punct der Trajectorie, so muss (§ 225) $\frac{2}{3}xy = a^2$ sein, und da dies von jedem Puncte der Trajectorie und der dadurch gehenden Parabel gilt, so ist die gesuchte Trajectorie eine Hyperbel, nämlich:

$$y = \frac{\frac{3}{2}a^2}{x}.$$

317.

Aufgabe 14. Man sucht die Trajectorie, welche ähnliche Ellipsen über derselben Abscissen-Achse und aus demselben Anfangspunct construirt, rechtwinklig durchschneidet.

Auflösung. Da die Ellipsen, d. h. ihre Achsen in demselben Verhältniss bleiben sollen, so kann man in $\beta = \frac{b}{a}\sqrt{a^2 - \alpha^2}$, den constanten Factor $\frac{b}{a} = m$ setzen, dann folgt aus der § 314 aufgestellten allgemeinen Formel:

$$\operatorname{tg}\varepsilon = \frac{\operatorname{tg}\tau - \operatorname{tg}\theta}{1 + \operatorname{tg}\tau \cdot \operatorname{tg}\theta}$$

worin $\operatorname{tg}\tau = \frac{dy}{dx}$ und $\operatorname{tg}\theta = \frac{d\beta}{d\alpha} = -\frac{m\alpha}{\sqrt{a^2 - \alpha^2}} = -\frac{m^2\alpha}{\beta}$, mithin:

$$\operatorname{tg}\varepsilon = \frac{\frac{dy}{dx} + m^2\frac{x}{y}}{1 - \frac{dy}{dx}.m^2\frac{x}{y}}$$

Weil nun $\varepsilon = 90^0$ sein soll, so ist $\operatorname{tg}\varepsilon = \infty$:

$$1 - \frac{dy}{dx} \cdot m^2\frac{x}{y} = 0$$

$$m^2\frac{dy}{y} = \frac{dx}{x}$$

$$m^2 ly = lx + lc = lcx$$

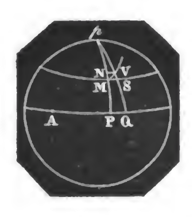
$$y^{m^2} = cx.$$

318.

Aufgabe 15. Eine Gleichung für die loxodromische Linie zu finden, d. h. für diejenige Linie, welche alle Meridiane der

Erde (diese als Kugel angenommen) unter einem gegebenen Winkel, ε, schneidet.

Auflösung. Es is hier am bequemsten die Lage der Puncte durch krummlinigte Coordinaten, nämlich durch Länge und Breite anzugeben.



Es sei demnach M ein Punct der Loxodrome, $AP = \lambda$ die auf dem Aequator gemessene Abscisse und $MP = \beta$ die auf dem Meridian gemessene Ordinate.

Wächst $AP = \lambda$ um $PQ = \Delta\lambda$ und $MP = \beta$ um $SV = \Delta\beta$, so ist $MS = \Delta\lambda \cdot \cos\beta$ und für $NMV = MVS = \varepsilon$, näherungsweise: $\operatorname{tg}\varepsilon = \frac{\Delta\lambda \cdot \cos\beta}{\Delta\beta}$ und ganz genau:

$$\operatorname{tg}\varepsilon = \frac{d\lambda \cdot \cos\beta}{d\beta}, \text{ hieraus:}$$

$$d\lambda = \operatorname{tg}\varepsilon \cdot \frac{d\beta}{\cos\beta} \text{ und (§ 209):}$$

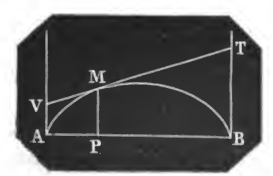
$$\lambda = \operatorname{tg}\varepsilon \cdot l\operatorname{tg}(45 + \tfrac{1}{2}\beta).$$

Soll für $\beta = 0$ auch $\lambda = 0$ sein, so ist keine Constante nöthig. Die Loxodrome geht also in unzähligen Windungen um den Pol (die Kugel) herum. Denn für $\beta = \pm 90^0$ ist $\lambda = \pm \infty$.

Anmerkung. Aufgaben über Trajectorien lassen sich offenbar sehr viele und sehr verschiedenartige aufstellen. (Siehe Brandes' höhere Geometrie 2. Band.) Wir geben jetzt eine andere von Lagrange aufgestellte lehrreiche Aufgabe.

319.

Aufgabe 16. Es ist eine grade Linie, $AB = 2a$, gegeben, und in ihren Endpuncten Perpendikel von unbestimmter Länge errichtet. Man soll nun eine krumme Linie von der Beschaffenheit finden, dass jede daran gezogene Berührungslinie, wie VT, von den Perpendikeln zwei solche Stücke AV, BT abschneidet, dass das Product daraus immer gleich einer constanten Grösse ist, $AV \cdot BT = b^2$.



Auflösung. Es sei M ein Punct der gesuchten Linie, $AP = x$, $MP = y$, so ist offenbar (indem man

durch M eine mit AB parallele Linie, GH, gezogen denkt und beachtet, dass $\operatorname{tg} \mathrm{TMH} = \operatorname{tg} \mathrm{VMG} = \frac{dy}{dx}$ ist):

$$\mathrm{BT} = y + (2a - x) \cdot \frac{dy}{dx}$$

$$\mathrm{AV} = y - x \frac{dy}{dx}$$

Mithin ist, $\frac{dy}{dx} = p$ gesetzt, laut Bedingung:

$$(y - px)(y - px + 2ap) = b^2 \cdots\cdots\cdots\cdots (1)$$

$$(y - px)^2 + 2ap(y - px) = b^2$$

$$y - px = -ap + \sqrt{b^2 + a^2p^2}$$

$$y = px - ap + (b^2 + a^2p^2)^{\frac{1}{2}} \cdots\cdots\cdots\cdots (2)$$

Diese Gleichung lässt sich am leichtesten nach § 291 integriren, darnach ist:

$$dy = pdx + xdp - adp + (b^2 + a^2p^2)^{-\frac{1}{2}} a^2 pdp$$

$$\left(x - a + \frac{a^2p}{\sqrt{b^2 + a^2p^2}}\right) \cdot dp = 0 \cdots\cdots\cdots\cdots (3)$$

Setzt man den Factor $dp = 0$ und integrirt, so ergiebt sich $p = c$. Setzt man diesen für p gefundenen constanten Werth (der sich wie vorauszusehen nur auf eine **grade** Linie beziehen kann) in (2), so hat man:

$$y = cx - ac + \sqrt{b^2 + a^2c^2} \cdots\cdots\cdots\cdots (4)$$

als das allgemeine Integral, welches der Differentialgleichung (1) Genüge leistet, indem man die Werthe von y und $\frac{dy}{dx}$ aus (4) in (1) substituirt. Jede durch einen beliebigen Punct der Linie (4) gezogene Tangente (welche hier offenbar mit der gefundenen Linie, weil sie eine grade ist, zusammenfällt) schneidet von den Perpendikeln die verlangten Stücke wirklich ab. Denn setzt man $x = 0$, so ist: $y = \mathrm{AV} = -ac + \sqrt{b^2 + a^2c^2}$, und setzt man $x = 2a$, so ist $y = \mathrm{BT} = ac + \sqrt{b^2 + a^2c^2}$ und folglich $\mathrm{AV} \cdot \mathrm{BT} = b^2$, wie verlangt.

Setzen wir den andern Factor in (3), nämlich:

$$x - a + \frac{a^2p}{\sqrt{b^2 + a^2p^2}} = 0$$

so ergiebt sich durch Elimination von p aus dieser Gleichung und der Differentialgleichung (1) noch eine andere Beziehung zwischen x, y, nämlich:

$$y = \frac{b}{a}\sqrt{2ax - x^2} \dots\dots\dots\dots (5)$$

welche, als besondere Auflösung, der Gleichung (1) ebenfalls Genüge leisten muss (§ 290). So folgt z. B. aus dieser Gleichung:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{b}{a} \cdot \frac{a - x}{\sqrt{2ax - x^2}}$$

und wenn man diese Werthe von y und $\frac{dy}{dx}$ in (1) substituirt, so ist für jeden Werth von x das Resultat der linken Seite $= b^2$.

320.

Erklärung. In vorstehendem Paragraphen haben wir zwei verschiedene Gleichungen gefunden, welche beide der Differentialgleichung:

$$\left(y - x\frac{dy}{dx}\right)\left(y - x\frac{dy}{dx} + 2a\frac{dy}{dx}\right) = b^2 \dots\dots (1)$$

Genüge leisten, nämlich:

$$y = cx - ac + \sqrt{b^2 + a^2c^2} \dots\dots\dots\dots (2)$$

$$y = \frac{b}{a}\sqrt{2ax - x^2} \dots\dots\dots\dots (3)$$

von welcher die eine eine grade Linie, die andere eine Ellipse darstellt.

Die Gleichung (2) enthält eine ganz unbestimmt gelassene beliebige Constante, c, und wird deshalb das allgemeine oder auch vollkommene Integral der Gleichung (1) genannt.

Setzt man statt dieser unbestimmten oder allgemeinen Constante allerlei verschiedene bestimmte Werthe, c_1, c_2, $c_3 \cdots$, so erhält man aus dem allgemeinen Integral (2) ebenso viele sogenannte specielle oder besondere Integrale, welche alle dieselbe Art Linien ausdrücken,*) und wovon jede der Differentialgleichung (1) Genüge leistet.

*) Was man unter bestimmtem Integral versteht, ist schon früher (§ 221) erklärt. Man unterscheidet demnach dreierlei Arten Integrale, nämlich allgemeines (vollkommenes), specielles und bestimmtes.

Die Gleichung (3) aber, welche ebenfalls der Differentialgleichung (1) Genüge leistet, jedoch keine willkürliche Constante enthält (a und b sind ja gegeben), ist nicht durch Integration, sondern durch Differentiation und Elimination gefunden, und da sie auch nicht aus der allgemeinen Integralgleichung (2) abgeleitet werden kann, welchen Werth man der Constante c auch beilegen möchte, so ist sie dem Begriffe gemäss weder ein allgemeines noch ein specielles Integral der Gleichung (1) und heisst deshalb auch zur Unterscheidung eine besondere Auflösung derselben (§ 290).

321.

Wir sind im Vorhergehenden auf den merkwürdigen Fall gestossen, dass einer und derselben Differentialgleichung zwei verschiedene primitive Gleichungen, nämlich das vollkommene Integral und die besondere Auflösung Genüge leisten. Vor Lagrange's Zeiten waren die besonderen Auflösungen so befremdend, dass man sie geradezu für ungereimt und unzulässig erklärte. Lagrange zeigte aber, dass die besondere Auflösung einer Differentialgleichung ebenso gut einen Sinn hat, wie das allgemeine Integral mit willkürlicher Constante, mit welchem es in einer engen Beziehung steht, ja selbst, was hier unmöglich erscheint, aus diesem abgeleitet werden kann. Um jedoch diese nicht leichte Sache aufzuklären und zu begreifen, überlege man erst Folgendes:

322.

Unsere drei in Betracht kommenden Gleichungen waren (§ 320):

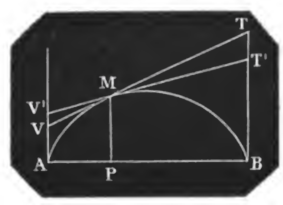
$$\left(y - x\frac{dy}{dx}\right)\left(y - x\frac{dy}{dx} + 2a\frac{dy}{dx}\right) = b^2 \cdots\cdots\cdots (1)$$

$$y = cx - ac + \sqrt{b^2 + a^2 c^2} \cdots\cdots\cdots (2)$$

$$y = \frac{b}{a}\sqrt{2ax - x^2} \cdots\cdots\cdots (3)$$

In dem vollkommenen Integral (2), welches eine grade Linie darstellt, ist die Constante c bekanntlich die trigonometrische Tangente des Winkels, unter welchem die grade Linie die Abscissenlinie schneidet. Giebt man dieser willkürlichen Constante c allerlei bestimmte Werthe c_1, c_2, $c_3 \cdots\cdots$, so erhält man ebenso viele besondere grade Linien (besondere Integrale), welche alle der

Gleichung (1) Genüge leisten und sich je zwei in einem Puncte schneiden. *)



Stellt man sich nun vor, die Constante c sei veränderlich und denkt sich alle durch stetige Veränderung der Constante unmittelbar auf einander folgenden graden Linien construirt, so müssen offenbar auch die Durchschnittspuncte je zweier unmittelbar auf einander folgenden Linien stetig auf einander folgen und eine gewisse krumme Linie bilden, welche von jeder der graden Linien offenbar berührt wird oder, was dasselbe sagt, die erwähnte krumme Linie berührt alle graden. Es entsteht deshalb die Frage nach der Gleichung $y = \mathrm{F}(x)$ dieser krummen Linie. Es sei $\mathrm{M}(x, y)$ ein beliebiger Punct der krummen Linie und $y = c_{,}x - ac_{,} + \sqrt{b^2 + a^2 c_{,}^2}$ die Gleichung der durch denselben Punct gehenden graden Linie V'T', so muss die Gleichung der krummen Linie offenbar so beschaffen sein, dass für diesen Punct nicht allein die Coordinaten x, y, sondern auch der Differential-Quotient $\frac{dy}{dx}$ der krummen Linie mit denen der graden Linie übereinstimmen und gleichzeitig der Differentialgleichung (1) Genüge leisten. Da dies nun aber, wie wir gesehen haben, mit der besondern Auflösung (3) der Fall ist, so ist diese auch nothwendig die Gleichung der krummen Linie, welche alle graden berührt.

323.

* Hiemit wäre freilich die geometrische Bedeutung der besondern Auflösung (3) der Gleichung (1) erklärt. Die besondere Auflösung ist aber nur beiläufig, gleichsam zufällig gefunden, indem man es doch als Zufall ansehen muss, dass die Differentialgleichung (1) sich auf die § 290 angegebene Form bringen und, wie dort gezeigt, durch Differentiation integriren liess. Man kommt deshalb leicht auf den Gedanken, ob sich wohl aus einer,

*) Man bemerke, dass der Fall, wo, wie hier in Gleichung (2), die Constante c in einem veränderlichen Gliede vorkommt, sehr verschieden ist von dem, wo die Constante dem Integral nur mit dem $\pm$ Zeichen hinzugefügt ist. Giebt man z. B. in der Gleichung $y = \alpha x + \beta$ nicht der Constante α, sondern der Constante β allerlei Werthe, so werden alle graden Linien parallel.

durch wirkliche Integration gefundenen oder auch ganz willkürlich aufgeworfenen Gleichung, z. B. die der graden Linie:

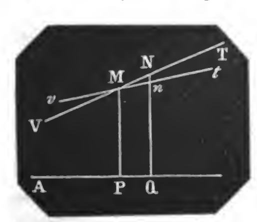
$$y + cx - ac + \sqrt{b^2+a^2c^2} \cdots\cdots\cdots\cdots (1)$$

indem man die in einem veränderlichen Gliede vorkommende Constante c **stetig** ändert, die Gleichung der krummen Linie ableiten lässt, welche die stetig auf einander folgenden Durchschnittspuncte der aus (1) entspringenden unzähligen Linien bilden.

Deuten wir die zu findende Gleichung der fraglichen krummen Linie vorläufig durch:

$$\mathrm{y} = \mathrm{F}(x)$$

an, so ist zuerst klar, dass jede der unzähligen graden Linien, welche durch die **stetige** Aenderung der Constante c in (1) entsteht, wegen der **stetigen** Folge der Durchschnittspuncte, durch die gesuchte krumme Linie berührt wird (Berührung ersten Grades, § 126), und dass also für eine beliebige Abscisse, $\mathrm{AP}=x$, die Constante c einen solchen Werth haben muss, dass gleichzeitig $\mathrm{y} = y$ und $\frac{dy}{dx} = \frac{d\mathrm{y}}{dx} = \mathrm{F}'(x)$ wird. Es ist mithin die Constante c eine Function von x. Wäre diese Function bekannt, so könnte man sie statt c in (1) substituiren und die resultirende Gleichung würde dann, wie folgende Betrachtung zeigt, die gesuchte sein.



Es sei VT die durch M gehende grade Linie, welche der Constante c entspricht, mithin:

$$y = cx - ac + \sqrt{b^2+a^2c^2} \cdots (1)$$

Lassen wir in (1) x um eine kleine Grösse, Δx, wachsen, so gelangen wir zu einem anderen Punct, N, **derselben** Linie VT. Lassen wir aber in (1) nicht bloss x, sondern gleichzeitig auch c um die kleine Grösse Δc wachsen, so gelangen wir zu einem Punct, n, einer andern graden Linie und y wird dann eine Function zweier veränderlichen Grössen, x, c, und man hat (§ 162):

$$\Delta y = \left(\frac{dy}{dx}\right)\Delta x + \left(\frac{dy}{dc}\right)\Delta c + \cdots\cdots$$

$$\Delta y = c \cdot \Delta x + \left(x - a + \frac{a^2 c}{\sqrt{b^2+a^2c^2}}\right) \cdot \Delta c + \cdots\cdots (2)$$

Nehmen wir nun für ein beliebiges $x = \mathrm{AP}$ der gesuchten krummen Linie, die Constante c so, dass der Coefficient von Δc, nämlich: $x - a + \frac{a^2 c}{\sqrt{b^2 + a^2 c^2}} = 0$ wird, mithin: $c = \frac{b(a-x)}{a\sqrt{2ax - x^2}}$ ist, und lassen zugleich Δc und Δx bis zu Infinitesimalgrössen abnehmen, damit die Glieder mit höhern Potenzen von Δc (und auch von Δx, wenn solche da wären) verschwinden, so leuchtet ein, dass die Puncte N und n der Linien VT, vt mit M, als ihrem Durchschnittspunct, zusammen fallen. (Vergl. § 243, Rdmkg.)

Substituiren wir also diesen Werth von c in (1), so kann man daselbst auch y statt y setzen, weil die Puncte n und N zusammenfallen, und weil die aus (1) und (2) folgenden Differential-Quotienten gleich sind. Da nun aber der Punct M die Abscisse x ganz unbestimmt gelassen, dieselben Schlüsse also für jeden Punct der gesuchten krummen Linie gelten, so ist die Gleichung derselben:

$$\mathrm{y} = \frac{b(a-x)x}{a\sqrt{2ax - x^2}} - \frac{ab(a-x)}{a\sqrt{2ax - x^2}} + \sqrt{b^2 + a^2 \cdot \frac{b^2(a-x)^2}{a^2(2ax - x^2}}$$

was gehörig reducirt, auf die vorhin gefundene besondere Auflösung führt, nämlich:

$$\mathrm{y} = \frac{b}{a}\sqrt{2ax - x^2}$$

324.

* Ist also die Constante c einer gefundenen Integralgleichung in einem veränderlichen Gliede enthalten (oder durch Umformung hinein gebracht worden), so findet man die noch etwa vorhandene besondere Auflösung (Auflösungen), indem man nur die allgemeine Integralgleichung, d. h. die Glieder derselben, in welchen die Constante c enthalten ist, in Bezug auf c differentiirt, den Factor von dc gleich Null setzt, auf c reducirt und den für c erhaltenen Ausdruck, der eine Function von x oder y, oder von x und y zugleich sein kann, rückwärts substituirt.

Die Theorie der besondern Auflösungen führt auf sehr grosse Weitläufigkeiten, wenn die Differentialgleichung von einer höhern Ordnung oder von einem höhern Grade ist, und wenn — was allerdings möglich ist — die besondere Auflösung daraus direct, d. h. ohne erst das allgemeine Integral zu suchen, abgeleitet werden soll. (S. Cauchy's leçons T. II. p. 374.)

325.

* Aufgabe. Man sucht eine krumme Linie von der Beschaffenheit, dass für jeden Punct derselben das Quadrat der Normale gleich dem Product aus der Summe der Abscisse und Subnormale und einem constanten Factor, a, ist. In Zeichen: $N^2 = a(x + S_n)$.

Auflösung. Zufolge § 49 ist:

$$y^2\left(1 + \frac{dy^2}{dx^2}\right) = a\left(x + y\frac{dy}{dx}\right)$$

$$\frac{dy^2}{dx^2} - \frac{a}{y} \cdot \frac{dy}{dx} = \frac{ax - y^2}{y^2}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{1}{2}a \pm \sqrt{\frac{1}{4}a^2 + ax - y^2}}{y}$$

$$ydy = \tfrac{1}{2}adx - \sqrt{\tfrac{1}{4}a^2 + ax - y^2} \cdot dx$$

$$dx = \frac{\frac{1}{2}adx - ydy}{\sqrt{\frac{1}{4}a^2 + ax - y^2}}$$

$$x + c = \sqrt{\tfrac{1}{4}a^2 + ax - y^2}$$

$$x^2 + 2cx + c^2 = \tfrac{1}{4}a^2 + ax - y^2$$

$$y^2 + x^2 - (a - 2c)x = \tfrac{1}{4}a^2 - c^2$$

$$y^2 + [x - (\tfrac{1}{2}a - c)]^2 = \tfrac{1}{2}a^2 - ac \cdots\cdots\cdots (1)$$

Die gesuchte Linie ist also ein Kreis, dessen Mittelpuncts-Abscisse $= \frac{1}{2}a - c$, Mittelpuncts-Ordinate $= 0$ und Radius $= \sqrt{\frac{1}{2}a^2 - ac}$ (höhere Geom. § 20).

Nimmt man die Constante c veränderlich, d. h. denkt man sich alle besondere Kreise construirt, welche in dem allgemeinen Integral liegen und sucht den geometrischen Ort der stetig auf einander folgenden Durchschnittspuncte, indem man die Gleichung (1) oder auch die vorhergehende in Bezug auf c differentiirt, so folgt aus: $2[x - (\frac{1}{2}a - c)] \cdot dc + adc = 0$; $2x + 2c = 0$, mithin: $c = -x$. Diesen Werth von c wieder in (1) substituirt, ergiebt sich als besondere Auflösung:

$$y = \sqrt{\tfrac{1}{4}a^2 + ax}$$

Die Linie, welche alle Kreise berührt (einhüllt), ist also die gewöhnliche Parabel. Denn schiebt man den Anfangspunct um $\frac{1}{4}a$ zurück und setzt: $x = t - \frac{1}{4}a$, so ist: $y = \sqrt{at}$.

Zweiundzwanzigstes Buch.

Ergänzungen zu den im ersten Buche gegebenen Integrationsmethoden.

326.

Wo die im ersten Buche mitgetheilten Methoden, eine Function zu integriren, nicht ausreichen, da ist es auch, ein paar seltene, specielle Fälle abgerechnet, bei dem gegenwärtigen Zustande der Integral-Rechnung nicht möglich, das Integral in geschlossener Form zu erhalten. Diese wenigen Functionen, bei welchen die Integration durch sinnreiche Kunstgriffe gelungen ist, wollen wir hier nachträglich noch mittheilen, um dadurch den Anfänger, der an dieser fast rein technischen Sache Vergnügen findet, vielleicht zu weitern Speculationen zu veranlassen.

I. Integration der echt gebrochenen rationellen Functionen.

327.

Für die Integrale $\int \frac{dx}{x^2+px+q}$, $\int \frac{xdx}{x^2+px+q}$ und $\int \frac{(Ax+B)dx}{x^2+px+q}$ lassen sich auch, für vorkommende Fälle, allgemeine Formeln aufstellen, jedoch muss man dann zwei Fälle unterscheiden, wo die einfachen Factoren des Nenners reell oder imaginair sind.

1. Wenn die Wurzeln imaginair sind, mithin, wenn q positiv, $\frac{p^2}{4} < q$ ist. *) Dann setze man, um die hier unbequemen imaginairen Grössen zu vermeiden:

*) Aus $x^2+px+q=0$, folgt: $x=-\frac{1}{2}p \pm \sqrt{\left(\frac{p^2}{4}-q\right)}$

$$\int \frac{dx}{x^2+px+q} = \int \frac{dx}{(x+\frac{1}{2}p)^2+q-\frac{p^2}{4}}$$

Setzt man einstweilen $q-\frac{p^2}{4}=a^2$, $x+\frac{1}{2}p=u$, mithin $dx=du$, so ist:

$$\int \frac{dx}{x^2+px+q} = \int \frac{du}{a^2+u^2} = \frac{1}{a} \text{ arc tg } \frac{u}{a}$$

und wenn man für u und a ihre Werthe zurücksetzt:

$$\int \frac{dx}{x^2+px+q} = \frac{2}{\sqrt{4q-p^2}} \cdot \text{arc tg } \frac{2x+p}{\sqrt{4q-p^2}} \cdots (1)$$

So ist z. B. $\int \frac{dx}{x^2-2x+3} = \frac{1}{\sqrt{2}} \text{arc tg} \frac{x-1}{\sqrt{2}}$

Wäre $q=\frac{p^2}{4}$, also $4q-p^2=0$, so wäre der Nenner ein vollkommenes Quadrat und es ist dann: $\int \frac{dx}{(x+\frac{1}{2}p)^2} = -\frac{1}{x+\frac{1}{2}p}$

2. Wenn die Wurzeln reell sind, mithin q entweder negativ, oder wenn positiv, dann doch $\frac{p^2}{4}>q$. Dann setze man:

$$\int \frac{dx}{x^2+px-q} = \int \frac{dx}{(x+\frac{1}{2}p)^2-(\frac{p^2}{4}+q)} = \int \frac{du}{u^2-a^2} = \frac{1}{2a} l\left(\frac{u-a}{u+a}\right)$$

$$\int \frac{dx}{x^2+px-q} = \frac{1}{\sqrt{p^2+4q}} \cdot l \frac{2x+p-\sqrt{p^2+4q}}{2x+p+\sqrt{p^2+4q}} \cdots (2)$$

So ist z. B. $\int \frac{24dx}{x^2+3x-18} = \frac{8}{3} \cdot l\left(\frac{x-3}{x+6}\right)$

Die allgemeine Formel für das zweite Integral ergiebt sich nun sehr leicht. Es ist nämlich:

$$\int \frac{xdx}{x^2+px+q} = \int \frac{xdx}{(x+\frac{1}{2}p)^2+q-\frac{p^2}{4}}$$

und wenn man $x+\frac{1}{2}p=u$, also $x=u-\frac{1}{2}p$, $dx=du$ und $q-\frac{p^2}{4}=a^2$ setzt:

$$\int \frac{xdx}{x^2+px+q} = \int \frac{(u-\frac{1}{2}p)du}{u^2+a^2} = \int \frac{udu}{u^2+a^2} - \frac{1}{2}p \int \frac{du}{u^2+a^2}$$

$$\int \frac{xdx}{x^2+px+q} = \frac{1}{2} l(x^2+px+q) - \frac{1}{2}p \int \frac{dx}{x^2+px+q} \cdots (3)$$

wo nun das Integral rechter Hand, je nachdem $\frac{p^2}{4} \lesseqgtr q$, nach Formel (1) oder (2) zu nehmen ist.

Für das dritte Integral hat man jetzt:

$$\int\frac{(\mathrm{A}x+\mathrm{B})\,dx}{x^2+px+q}=\mathrm{A}\int\frac{x\,dx}{x^2+px+q}+\mathrm{B}\int\frac{dx}{x^2+px+q}$$

$$\mathrm{A}\int\frac{x\,dx}{x^2+px+q}=\tfrac{1}{2}\mathrm{A}l(x^2+px+q)-\frac{\mathrm{A}p}{2}\int\frac{dx}{x^2+px+q}$$

$$\int\frac{(\mathrm{A}x+\mathrm{B})\,dx}{x^2+px+q}=\tfrac{1}{2}\mathrm{A}l(x^2+px+q)+\left(\mathrm{B}-\frac{\mathrm{A}p}{2}\right)\int\frac{dx}{x^2+px+q}\cdots(4)$$

328.

Um das Integral von $\frac{dx}{(x^2+a^2)^n}$ zu erhalten, welches auf verschiedene Weise gefunden worden, ist es am bequemsten, die theilweise Integration anzuwenden. Man hat nämlich (§ 201):

$$\int(x^2+a^2)^{-n}dx=(x^2+a^2)^{-n}x-\int x\cdot -n(x^2+a^2)^{-(n+1)}2x\,dx$$

$$\int\frac{dx}{(x^2+a^2)^n}=\frac{x}{(x^2+a^2)^n}+2n\int\frac{x^2dx}{(x^2+a^2)^{n+1}}$$

$$=\frac{x}{(x^2+a^2)^n}+2n\int\frac{(x^2+a^2)-a^2}{(x^2+a^2)^{n+1}}\cdot dx$$

$$\int\frac{dx}{(x^2+a^2)^n}=\frac{x}{(x^2+a^2)^n}+2n\int\frac{dx}{(x^2+a^2)^n}-2na^2\int\frac{dx}{(x^2+a^2)^{n+1}}$$

Diese Gleichung auf das letzte Integral rechter Hand reducirt:

$$2na^2\int\frac{dx}{(x^2+a^2)^{n+1}}=\frac{x}{(x^2+a^2)^n}+(2n-1)\int\frac{dx}{(x^2+a^2)^n}$$

$$\int\frac{dx}{(x^2+a^2)^{n+1}}=\frac{1}{2a^2n}\cdot\frac{x}{(x^2+a^2)^n}+\frac{2n-1}{2a^2n}\int\frac{dx}{(x^2+a^2)^n}$$

Setzt man jetzt $n+1=m$, mithin $n=m-1$, so erhält man folgende sogenannte Reductionsformel:

$$\text{I.}\quad\int\frac{dx}{(x^2+a^2)^m}=\frac{1}{2(m-1)a^2}\cdot\frac{x}{(x^2+a^2)^{m-1}}+\frac{2m-3}{2(m-1)a^2}\int\frac{dx}{(x^2+a^2)^{m-1}}$$

nach welcher man das ursprüngliche Integral auf ein anderes von derselben Form reducirt, in welchem der Exponent m um eine Einheit niedriger ist. Durch wiederholte Anwendung dieser Formel kommt man, weil m eine ganze Zahl, zuletzt auf das bekannte Integral:

$$\int\frac{dx}{x^2+a^2}=\frac{1}{a}\operatorname{arc}\operatorname{tg}\frac{x}{a}$$

Man hat z. E. für $m = 3$:

$$\int \frac{dx}{(x^2 + a^2)^3} = \frac{1}{4a^2} \cdot \frac{x}{(x^2 + a^2)^2} + \frac{3}{4a^2} \int \frac{dx}{(x^2 + a^2)^2}$$

$$\int \frac{dx}{(x^2 + a^2)^2} = \frac{1}{2a^2} \cdot \frac{x}{x^2 + a^2} + \frac{1}{2a^2} \int \frac{dx}{x^2 + a^2}$$

$$= \frac{1}{2a^2} \cdot \frac{x}{x^2 + a^2} + \frac{1}{2a^2} \cdot \frac{1}{a} \operatorname{arc\,tg} \frac{x}{a}, \text{ mithin:}$$

$$\int \frac{dx}{(x^2 + a^2)^3} = \frac{x}{4a^2(x^2 + a^2)^2} + \frac{3x}{8a^4(x^2 + a^2)} + \frac{3}{8a^5} \operatorname{arc\,tg} \frac{x}{a}$$

Anmerkung. Das Integral $\int \frac{dx}{(x^2 + px + q)^m}$ lässt sich leicht auf die vorstehende Reductionsformel zurückführen. Man hat nämlich: $x + \frac{1}{2}p = u$, $dx = du$ und $q - \frac{1}{4}p^2 = a^2$ gesetzt:

$$\int \frac{dx}{(x^2 + px + q)^m} = \int \frac{dx}{[(x + \frac{1}{2}p)^2 + q - \frac{1}{4}p^2]^m} = \int \frac{du}{(u^2 + a^2)^m}$$

329.

Ganz auf dieselbe Weise findet man auch die folgende Reductionsformel:

$$\text{II. } \int \frac{dx}{(a^2 - x^2)^m} = \frac{x}{2(m-1)a^2 \cdot (a^2 - x^2)^{m-1}} + \frac{2m-3}{2(m-1)a^2} \int \frac{dx}{(a^2 - x^2)^{m-1}}$$

Hiebei kommt man zuletzt auf das bekannte Integral:

$$\int \frac{dx}{a^2 - x^2} = \frac{1}{2a} \cdot l \frac{a + x}{a - x}$$

330.

Setzt man: $\frac{x^p dx}{(x^2 + a^2)^m} = x^{p-1} \cdot \frac{x dx}{(x^2 + a^2)^m}$

und: $\frac{x^p dx}{(a^2 - x^2)^m} = x^{p-1} \cdot \frac{x dx}{(a^2 - x^2)^m}$

nennt den ersten Factor u, den andern dv, und integrirt nach § 201, so erhält man noch folgende zwei Reductionsformeln:

$$\text{III. } \int \frac{x^p dx}{(x^2 + a^2)^m} = -\frac{x^{p-1}}{2(m-1)(x^2 + a^2)^{m-1}} + \frac{p-1}{2(m-1)} \int \frac{x^{p-2} dx}{(x^2 + a^2)^{m-1}}$$

$$\text{IV. } \int \frac{x^p dx}{(a^2 - x^2)^m} = \frac{x^{p-1}}{2(m-1)(a^2 - x^2)^{m-1}} - \frac{p-1}{2(m-1)} \int \frac{x^{p-2} dx}{(a^2 - x^2)^{m-1}}$$

331.

Das Integral von $\frac{x^p}{x^n - 1} \cdot dx$ findet man durch Zerlegung des Factors von dx in Partialbrüche.

Zufolge Analysis § 131 sind sämmtliche nWurzeln der Gleichung $x^n - 1 = 0$ durch die Formel:

$$x = \cos\frac{2k\pi}{n} \pm i\sin\frac{2k\pi}{n}$$

gegeben, indem man hierin, je nachdem n grade oder ungrade, $k = 0, 1, 2, 3 \cdots \frac{1}{2}n$ oder $k = 0, 1, 2, 3 \cdots \frac{1}{2}(n-1)$ setzt. Die zweitheiligen einfachen Factoren von $x^n - 1$, d. h. die Nenner der gesuchten Partialbrüche sind mithin:

$$x - \cos\frac{2k\pi}{n} - i\sin\frac{2k\pi}{n}$$
$$x - \cos\frac{2k\pi}{n} + i\sin\frac{2k\pi}{n}$$

Ist n grade, so giebt es für $k = 0$ und $k = \frac{1}{2}n$ zwei reelle Nenner $x - 1$ und $x + 1$, die andern sind alle gepaart. Ist n ungrade, so giebt es nur einen reellen Nenner, nämlich $x - 1$, für $k = 0$. Die andern Nenner sind gepaart vorhanden.

Seien nun $A_1, A_2 \cdots A_n$ die Zähler der nPartialbrüche, welche, weil die Nenner Formen ersten Grades sind, nothwendig constant sein müssen (Anal. § 142), so hat man:

$$\left.\begin{aligned}\frac{x^p}{x^n - 1} = \frac{A_1}{x-1} &+ \frac{A_2}{x - \cos\frac{2\pi}{n} - i\sin\frac{2\pi}{n}} + \frac{A_3}{x - \cos\frac{2\pi}{n} + i\sin\frac{2\pi}{n}} \\ &+ \frac{A_4}{x - \cos\frac{4\pi}{n} - i\sin\frac{4\pi}{n}} + \frac{A_5}{x - \cos\frac{4\pi}{n} + i\sin\frac{4\pi}{n}} \\ &+ \cdots\cdots\end{aligned}\right\} \cdots (1)$$

Ist n ungrade, so sind, den ersten Bruch $\frac{A_1}{x-1}$ ausgenommen, je zwei Brüche gepaart vorhanden. Ist n grade, so ist der erste Bruch $\frac{A_1}{x-1}$ und der letzte $\frac{A_n}{x+1}$.

Um den Zähler A_1 zu finden, multiplicire man die ganze Gleichung mit $x - 1$ und setze dann $x = 1$ (Anal. § 143), dann ist (weil $x - 1 = 0$ und $x^n - 1 = 0$):

$$A_1 = \frac{x^p(x-1)}{x^n - 1} = \frac{0}{0}, \text{ mithin (§ 81):}$$

$$A_1 = \frac{(x-1)p \cdot x^{p-1} + x^p}{nx^{n-1}} = \frac{x^p}{nx^{n-1}} = \frac{x^{p+1}}{nx^n}$$

$$A_1 = \frac{1}{n} \text{ (weil } x^n = 1 \text{ und } x^{p+1} = 1)$$

Um A_2 zu finden, multiplicire man mit $x - \cos\frac{2\pi}{n} - i\sin\frac{2\pi}{n}$ und setze dann $x = \cos\frac{2\pi}{n} + i\sin\frac{2\pi}{n}$, dann ist (weil $x^n = 1$):

$$A_2 = \frac{x^p \cdot \left(x - \cos\frac{2\pi}{n} - i\sin\frac{2\pi}{n}\right)}{x^n - 1} = \frac{0}{0}$$

$$A_2 = \frac{\left(x - \cos\frac{2\pi}{n} - i\sin\frac{2\pi}{n}\right)px^{p-1} + x^p}{nx^{n-1}}$$

$$A_2 = \frac{x^p}{nx^{n-1}} = \frac{x^{p+1}}{nx^n} = \frac{\left(\cos\frac{2\pi}{n} + i\sin\frac{2\pi}{n}\right)^{p+1}}{n}$$

$$A_2 = \frac{1}{n}\left\{\cos\frac{2(p+1)\pi}{n} + i\sin\frac{2(p+1)\pi}{n}\right\} \text{ (Anal. § 88)}$$

Ebenso hat man für:

$$A_3 = \frac{1}{n}\left\{\cos\frac{2(p+1)\pi}{n} - i\sin\frac{2(p+1)\pi}{n}\right\}$$

$$A_4 = \frac{1}{n}\left\{\cos\frac{4(p+1)\pi}{n} + i\sin\frac{4(p+1)\pi}{n}\right\}$$

$$\vdots$$

Sind allgemein M und N die Zähler zweier Brüche mit den gepaarten Nennern $x - \cos\frac{2k\pi}{n} - i\sin\frac{2k\pi}{n}$ und $x - \cos\frac{2k\pi}{n} + i\sin\frac{2k\pi}{n}$, so ist:

$$M = \frac{1}{n}\left[\cos\frac{2k(p+1)\pi}{n} + i\sin\frac{2k(p+1)\pi}{n}\right] \text{ und}$$

$$N = \frac{1}{n}\left[\cos\frac{2k(p+1)\pi}{n} - i\sin\frac{2k(p+1)\pi}{n}\right]$$

und die beiden Brüche selbst also:

$$\frac{\frac{1}{n}\cdot\cos\frac{2k(p+1)}{n}\pi+\frac{1}{n}\cdot i\sin\frac{2k(p+1)}{n}\pi}{x-\cos\frac{2k}{n}\pi-i\sin\frac{2k}{n}\pi}=\frac{A+Bi}{x-\alpha-\beta i}$$

$$\frac{\frac{1}{n}\cdot\cos\frac{2k(p+1)}{n}\pi-\frac{1}{n}\cdot i\sin\frac{2k(p+1)}{n}\pi}{x-\cos\frac{2k}{n}\pi+i\sin\frac{2k}{n}\pi}=\frac{A-Bi}{x-\alpha+\beta i}$$

addirt man beide Brüche, indem man, wie angedeutet, des bequemern Schreibens halber, A, B, α, β, als Stellvertreter setzt, so ist:

$$\frac{A+Bi}{x-\alpha-\beta i}+\frac{A-Bi}{x-\alpha+\beta i}=\frac{2A(x-\alpha)}{(x-\alpha)^2+\beta^2}-\frac{2B\beta}{(x-\alpha)^2+\beta^2}$$

multiplicirt man jeden der beiden gepaarten Brüche oder ihre, rechter Hand stehende Summe mit dx und integrirt, so ist das Integral:

$$=Al[(x-\alpha)^2+\beta^2]-2B\operatorname{arc\,tg}\frac{x-\alpha}{\beta}$$

oder, für A, B, α, β ihre Werthe zurückgesetzt und beachtet, dass $\cos^2\frac{2k}{n}\pi+\sin^2\frac{2k}{n}\pi=1$:

$$=\begin{cases}+\frac{1}{n}\cos\frac{2k(p+1)}{n}\pi\cdot l\left(x^2-2x\cdot\cos\frac{2k}{n}\pi+1\right)\\ -\frac{2}{n}\sin\frac{2k(p+1)}{n}\pi\cdot\operatorname{arc\,tg}\frac{x-\cos\frac{2k}{n}\pi}{\sin\frac{2k}{n}\pi}\end{cases}$$

Denkt man sich die Gleichung (1) mit dx multiplicirt und integrirt, so giebt vorstehende Formel, indem man darin $k=1,2,3\cdots$ setzt, die Summe der Integrale von je zwei gepaarten Brüchen. Setzt man $k=0$, so erhält man das Integral des ersten Bruches $\frac{1}{n}\cdot\int\frac{dx}{x-1}=\frac{1}{n}l(x-1)$ doppelt. Dies ist natürlich, weil wir bei der paarweisen Vereinigung der Brüche den ersten als zweimal vorhanden fingirt haben, nämlich:

$$\frac{1}{n}\cdot\frac{1}{x-1-0\cdot i}+\frac{1}{n}\cdot\frac{1}{x-1+0\cdot i}=\frac{2}{n}\cdot\frac{x-1}{(x-1)^2}$$

mit dx multiplicirt und integrirt, ist das Integral also:

$$=\frac{1}{n}l(x-1)^2=\frac{2}{n}l(x-1)\ \text{statt}\ \frac{1}{n}l(x-1).$$

Aus demselben Grunde ist, wenn n grade, auch der letzte Bruch,*) $\frac{1}{n}\cdot\frac{1}{x+1}$, bei diesem paarweisen Zusammenfassen als zweimal vorhanden angenommen. Dies berücksichtigt, hat man folgende allgemeine Reductionsformel:

$$\text{I.}\quad \int\frac{x^p\,dx}{x^n-1}=\left\{\begin{array}{l}+\frac{1}{n}\cos\frac{2k(p+1)}{n}\pi\cdot l\left(x^2-2x\cdot\cos\frac{2k}{n}\pi+1\right)\\ -\frac{2}{n}\sin\frac{2k(p+1)}{n}\pi\cdot\text{arc tg}\,\frac{x-\cos\frac{2k}{n}\pi}{\sin\frac{2k}{n}\cdot\pi}\end{array}\right\}$$

worin $k=0,\ 1,\ 2,\ 3\cdots\frac{1}{2}n$ zu setzen und vom ersten positiven Theil jedesmal die Hälfte zu nehmen ist, wenn der zweite negative Theil verschwindet, was, wenn n ungrade, für $k=0$, und wenn n grade, für $k=0$ und $k=\frac{1}{2}n$ der Fall ist.

Ganz auf dieselbe Weise findet man folgende Reductionsformel (Analysis § 135):

$$\text{II.}\quad \int\frac{x^p\,dx}{x^n+1}=\left\{\begin{array}{l}-\frac{1}{n}\cos\frac{(2k+1)(p+1)}{n}\pi\cdot l\left(x^2-2x\cdot\cos\frac{2k+1}{n}\pi+1\right)\\ +\frac{2}{n}\cdot\sin\frac{(2k+1)(p+1)}{n}\pi\cdot\text{arc tg}\,\frac{x-\cos\frac{2k+1}{n}\pi}{\sin\frac{2k+1}{n}\pi}\end{array}\right.$$

bei welcher für ein ungrades n dieselben Bemerkungen gelten.

Beispiel. Sei $p=0$, $n=3$, so ist für $k=0$, $\frac{3-1}{2}$

$$\int\frac{dx}{x^3-1}=\tfrac{1}{2}\cdot\tfrac{1}{3}l(x-1)^2+\tfrac{1}{3}\cdot\cos\tfrac{2}{3}\pi\cdot l(x^2-2x\cdot\cos\tfrac{2}{3}\pi+1)$$
$$-\tfrac{2}{3}\sin\tfrac{2}{3}\pi\cdot\text{arc tg}\frac{x-\cos\frac{2}{3}\pi}{\sin\frac{2}{3}\pi}$$

$$\int\frac{dx}{x^3-1}=\tfrac{1}{6}\cdot l\frac{(x-1)^2}{x^2+x+1}-\frac{1}{\sqrt{3}}\cdot\text{arc tg}\frac{2x+1}{\sqrt{3}}$$

---

*) Den Zähler dieses Bruches findet man ebenso, wie den des ersten. Multiplicirt man nämlich die Gleichung (1) mit $x+1$ und setzt dann $x=-1$, so ist:

$$A_n=\frac{x^p(x+1)}{x^n-1}=\frac{0}{0}=\frac{x^p}{nx^{n-1}}=\frac{x^{p+1}}{nx^n}=\frac{1}{n}$$

Anmerkung. Die beiden Formen:

$$\frac{x^p dx}{x^n \pm a^n}, \qquad \frac{x^p dx}{ax^n \pm b}$$

lassen sich leicht auf die vorhergehenden zurückführen, indem man im ersten Fall $x = au$ und im andern $x = u \cdot \sqrt[n]{\frac{b}{a}}$ setzt.

332.

Die im vorhergehenden § erwähnten Functionen lassen sich oftmals leichter durch Substitutionen integriren. Man hat z. B.:

$$\int \frac{x^2 dx}{x^6 + 1} = \tfrac{1}{3} \int \frac{d \cdot x^3}{1 + (x^3)^2} = \tfrac{1}{3} \int \frac{du}{1 + u^2} = \tfrac{1}{3} \operatorname{arc} \operatorname{tg} x^3$$

$$\int \frac{x dx}{x^4 - a^4} = \tfrac{1}{2} \int \frac{d \cdot x^2}{(x^2)^2 - a^2} = \tfrac{1}{2} \int \frac{du}{u^2 - \alpha^2}$$

$$\int \frac{x dx}{x^4 - a^4} = \frac{1}{4\alpha} l \frac{u - \alpha}{u + \alpha} = \frac{1}{4a^2} l \frac{x^2 - a^2}{x^2 + a^2}$$

II. Integration der irrationalen Functionen.

333.

Wir haben schon § 207 bemerkt, dass es nur sehr wenige irrationale Functionen giebt, deren Integral sich in geschlossener Form darstellen lässt, aus dem einfachen Grunde, weil in den meisten Fällen eine solche Form gar nicht existirt. Zu jenen wenigen irrationalen Functionen gehört die folgende, das sogenannte binomische Differential, welches sich unter zwei dazu günstigen Umständen rational machen lässt, nämlich:

$$x^m (a + bx^n)^{\frac{p}{q}} dx,$$

wo m, n, p, q ganze oder gebrochene, positive oder negative Zahlen sein mögen.

Erster Fall. Wenn $\frac{m+1}{n}$ eine ganze positive oder negative Zahl ist, dann setze:

$$a + bx^n = z^q, \text{ mithin: } x = \frac{(z^q - a)^{\frac{1}{n}}}{b^{\frac{1}{n}}}$$

$$x^m = \frac{(z^q - a)^{\frac{m}{n}}}{b^{\frac{m}{n}}} \text{ und } dx = \frac{(z^q - a)^{\frac{1}{n}-1} \cdot q z^{q-1} dz}{n b^{\frac{1}{n}}}$$

$$\int x^m (a + bx^n)^{\frac{p}{q}} \cdot dx = \frac{q}{n b^{\frac{m+1}{n}}} \int z^{p+q-1} (z^q - a)^{\frac{m+1}{n}-1} \cdot dz.$$

Ist nun, wie vorausgesetzt, $\frac{m+1}{n}$ eine ganze positive Zahl, so kann man das Binom unter dem Integralzeichen entwickeln und hat dann nur eine Reihe von Potenzen zu integriren. Ist $\frac{m+1}{n}$ eine ganze negative Zahl, so erhält man eine rational gebrochene Function.

Zweiter Fall. Wenn $\frac{m+1}{n} + \frac{p}{q}$ eine ganze positive oder negative Zahl ist, dann setze man, weil:

$$x^m (a + bx^n)^{\frac{p}{q}} dx = x^{m + \frac{np}{q}} \cdot (b + ax^{-n})^{\frac{p}{q}} \cdot dx$$
$$b + ax^{-n} = z^q,$$

so wird die Function, indem man in dem vorhergehenden Integral $m + \frac{np}{q}$ in m, $-n$ in n, a in b und b in a verwandelt:

$$-\frac{q}{na} \cdot z^{p+q-1} \cdot (z^q - b)^{-\left(\frac{m+1}{n} + \frac{p}{q} + 1\right)} \cdot dz$$

also rational, wenn $\frac{m+1}{n} + \frac{p}{q}$ eine ganze Zahl ist.

Beispiel 1. In $\int x^3 (a^2 + x^2)^{-\frac{1}{2}} dx$ ist $m = 3$, $n = 2$, $\frac{p}{q} = -\frac{1}{2}$, $\frac{m+1}{n} = 2$. Man setze also:

$$a^2 + x^2 = z^2; \; x = (z^2 - a^2)^{\frac{1}{2}}; \; dx = z(z^2 - a^2)^{-\frac{1}{2}} dz$$

$$\int \frac{x^3 dx}{\sqrt{a^2 + x^2}} = \int (z^2 - a^2)\, dz = \frac{z^3}{3} - a^2 z$$

$$\int \frac{x^3 dx}{\sqrt{a^2 + x^2}} = \frac{(a^2 + x^2)^{\frac{3}{2}}}{3} - a^2 (a^2 + x^2)^{\frac{1}{2}} = \frac{(a^2 + x^2)^{\frac{1}{2}}}{3} (x^2 - 2a^2)$$

Beispiel 2. In $\int x^2 (a^2 + x^2)^{-\frac{5}{2}} \cdot dx$ ist $\frac{m+1}{n} + \frac{p}{q} = -1$.

Man setze also:

$$1 + a^2 x^{-2} = z^2\,;\;\; x = \frac{a}{(z^2-1)^{\frac{1}{2}}}\,;\;\; dx = -\frac{az\,dz}{(z^2-1)^{\frac{3}{2}}}$$

$$\int x^2\,(a^2+x^2)^{-\frac{5}{2}}\cdot dx = -\frac{1}{a^2}\int z^{-4}\cdot dz = \frac{1}{3a^2}\cdot\frac{1}{z^3}$$

$$\int x^2(a^2+x^2)^{-\frac{5}{2}}\cdot dx = \frac{1}{3a^2}\cdot\frac{x^3}{(a^2+x^2)^{\frac{3}{2}}}$$

334.

Folgende sechs Reductionsformeln mögen noch bemerkt werden, durch deren wiederholte Anwendung das binomische Integral:

$$\int x^m(a+bx^n)^p dx$$

wenn die Rationalisirung nicht möglich ist, in günstigen Fällen auf ein bekanntes oder doch einfacheres Integral zurückgeführt werden kann (m, n, p sind beliebig und p jedenfalls ein Bruch).

Es ist zuerst:

$$\int x^m(a+bx^n)^p dx = \int x^{m-n+1}\cdot(a+bx^n)^p x^{n-1} dx$$

und durch theilweise Integration:

$$\text{I.}\quad \int x^m(a+bx^n)^p dx = \begin{cases} +\dfrac{x^{m-n+1}\cdot(a+bx^n)^{p+1}}{nb(p+1)} \\[2ex] -\dfrac{m-n+1}{nb(p+1)}\displaystyle\int x^{m-n}\cdot(a+bx^n)^{p+1}dx \end{cases}$$

Nach dieser Formel kann man also gleichzeitig den Exponenten p vergrössern und m verkleinern.

Reducirt man auf das rechter Hand stehende Integral, so ist:

$$\int x^{m-n}(a+bx^n)^{p+1}dx = \begin{cases} +\dfrac{x^{m-n+1}\cdot(a+bx^n)^{p+1}}{m-n+1} \\[2ex] -\dfrac{nb(p+1)}{m-n+1}\displaystyle\int x^m(a+bx^n)^p dx \end{cases}$$

und wenn man $m-n=m'$, $p+1=p'$, mithin $m=m'+n$, $p=p'-1$ setzt und hernach die Accente wieder weglässt:

$$\text{II.} \int x^m(a+bx^n)^p dx = \begin{cases} +\dfrac{x^{m+1}(a+bx^n)^p}{m+1} \\ -\dfrac{nbp}{m+1}\displaystyle\int x^{m+n}\cdot(a+bx^n)^{p-1}dx \end{cases}$$

Will man bloss m verkleinern, ohne p zu ändern, so setze man das rechter Hand stehende Integral in I., nämlich:

$$\int x^{m-n}(a+bx^n)^{p+1}\cdot dx = \int x^{m-n}(a+bx^n)^p(a+bx^n)\,dx$$

$$= \int [ax^{m-n}(a+bx^n)^p + bx^m.(a+bx^n)^p]dx$$

$$= a\int x^{m-n}(a+bx^n)^p dx + b\int x^m(a+bx^n)^p dx$$

Substituirt man die rechte Seite statt der linken in I., fasst dann die beiden gleichnamigen Integrale in ein Glied zusammen und beachtet, dass $1+\frac{m-n+1}{n(p+1)} = \frac{m+np+1}{n(p+1)}$, so kommt nach gehöriger Reduction:

$$\text{III.} \int x^m(a+bx^n)^p dx = \begin{cases} +\dfrac{x^{m-n+1}\cdot(a+bx^n)^{p+1}}{b(m+np+1)} \\ -\dfrac{a(m-n+1)}{b(m+np+1)}\displaystyle\int x^{m-n}\cdot(a+bx^n)^p dx \end{cases}$$

Reducirt man diese Formel auf das Integral rechter Hand, so ist:

$$\int x^{m-n}.(a+bx^n)^p dx = \begin{cases} +\dfrac{x^{m-n+1}(a+bx^n)^{p+1}}{a(m-n+1)} \\ -\dfrac{b(m+np+1)}{a(m-n+1)}\displaystyle\int x^m(a+bx^n)^p dx \end{cases}$$

und wenn man $m-n=m'$, also $m=m'+n$ setzt und hernach den Accent wieder weglässt:

$$\text{IV.} \int x^m(a+bx^n)^p dx = \begin{cases} +\dfrac{x^{m+1}\cdot(a+bx^n)^{p+1}}{a(m+1)} \\ -\dfrac{b(m+n+np+1)}{a(m+1)}\displaystyle\int x^{m+n}(a+bx^n)^p dx \end{cases}$$

Will man p vergrössern, ohne m zu verändern, so setze man in IV.:

$$x^{m+n} = x^m \frac{(a+bx^n-a)}{b} = x^m \frac{(a+bx^n)}{b} - \frac{a}{b} \cdot x^m, \text{ mithin:}$$

$$x^{m+n} \cdot (a+bx^n)^p = x^m(a+bx^n)^{p+1} - \frac{a}{b} x^m(a+bx^n)^p$$

$$\text{so ist: } \int x^{m+n} \cdot (a+bx^n)^p dx = \begin{cases} +\frac{1}{b}\int x^m(a+bx^n)^{p+1} \cdot dx \\ -\frac{a}{b}\int x^m(a+bx^n)^p dx. \end{cases}$$

Substituirt man die rechte Seite statt der linken in IV. und fasst dann die gleichnamigen Integrale in Eins zusammen, so hat man nach gehöriger Reduction:

$$\text{V. } \int x^m(a+bx^n)^p dx = \begin{cases} -\frac{x^{m+1} \cdot (a+bx^n)^{p+1}}{an(p+1)} \\ +\frac{m+n+np+1}{an(p+1)} \int x^m(a+bx^n)^{p+1} \cdot dx \end{cases}$$

Um p zu verkleinern, ohne m zu verändern, reducire man V auf das Integral rechter Hand, so hat man:

$$\int x^m(a+bx^n)^{p+1} dx = \begin{cases} +\frac{x^{m+1} \cdot (a+bx^n)^{p+1}}{m+n+np+1} \\ +\frac{an(p+1)}{m+n+np+1} \int x^m(a+bx^n)^p dx \end{cases}$$

Setzt man $p+1=p'$, also $p=p'-1$, und lässt im Resultat den Accent wieder weg, so ist:

$$\text{VI. } \int x^m . (a+bx^n)^p dx = \begin{cases} +\frac{x^{m+1} \cdot (a+bx^n)^p}{m+np+1} \\ +\frac{anp}{m+np+1} \int x^m(a+bx^n)^{p-1} dx \end{cases}$$

Anmerkung. Sollte eine dieser 6 Reductionsformeln ein Glied $= \infty$ geben, so ist die Formel unbrauchbar. Es ist dies

dann aber ein Zeichen, dass das binomische Differential sich rational machen lässt und nach § 333 integrirt werden kann.

335.

Aufgabe. Man soll das Integral:

$$\int \frac{x^m dx}{\sqrt{1-x^2}}$$

finden, wenn m eine ganze Zahl ist.

Auflösung. Hier passt offenbar die Formel III. (§ 334), indem hier $n=2$, $p=-\frac{1}{2}$ ist, daher:

$$\int \frac{x^m dx}{\sqrt{1-x^2}} = -\frac{x^{m-1}\sqrt{1-x^2}}{m} + \frac{m-1}{m}\int \frac{x^{m-2}dx}{\sqrt{1-x^2}}$$

Durch Wiederholung dieser Reduction wird der Exponent m jedesmal um zwei Einheiten kleiner und man kommt zuletzt, je nachdem m grade oder ungrade ist, auf die bekannten Integrale:

$$\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \text{arc}\sin x; \qquad \int \frac{x dx}{\sqrt{1-x^2}} = -\sqrt{1-x^2}$$

Es ist hier also allgemein:

1) m grade:

$$\int \frac{x^m \cdot dx}{\sqrt{1-x^2}} = -\sqrt{1-x^2}\left[\frac{1}{m}\cdot x^{m-1} + \frac{1\cdot(m-1)}{(m-2)\cdot m}x^{m-3} + \cdots + \frac{1\cdot3\cdot5\cdots(m-1)}{2\cdot4\cdot6\cdots\cdots m}x\right] + \frac{1\cdot3\cdot5\cdots(m-1)}{2\cdot4\cdot6\cdots\cdots\cdots m}\text{arc}\sin x$$

2) m ungrade:

$$\int \frac{x^m dx}{\sqrt{1-x^2}} = -\sqrt{1-x^2}\left[\frac{1}{m}x^{m-1} + \frac{1\cdot(m-1)}{(m-2)\cdot m}x^{m-3} + \cdots + \frac{1\cdot2\cdot4\cdot6\cdots(m-1)}{1\cdot3\cdot5\cdot7\cdots\cdots m}\right]$$

Hiernach hat man z. B.:

$$\int \frac{x^2 dx}{\sqrt{1-x^2}} = -\frac{x}{2}\sqrt{1-x^2} + \tfrac{1}{2}\text{arc}\sin x$$

$$\int \frac{x^4 dx}{\sqrt{1-x^2}} = -\sqrt{1-x^2}\left[\frac{x^3}{4} + \frac{1\cdot3}{2\cdot4}x\right] + \frac{1\cdot3}{2\cdot4}\text{arc}\sin x$$

$$\int \frac{x^5 dx}{\sqrt{1-x^2}} = -\sqrt{1-x^2}\left[\frac{x^4}{5} + \frac{1\cdot4}{3\cdot5}x^2 + \frac{1\cdot2\cdot4}{1\cdot3\cdot5}\right]$$

336.

Aufgabe. Man soll dass Integral:

$$\int \frac{x^{-m}}{\sqrt{1-x^2}}\,dx$$

finden, wenn m eine ganze Zahl ist.

Auflösung. Nach Formel IV. (§ 334) hat man:

$$\int \frac{x^{-m}dx}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{x^{-m+1}\sqrt{1-x^2}}{-m+1} + \frac{m-2}{m-1}\int \frac{x^{-m+2}dx}{\sqrt{1-x^2}}$$

Durch Wiederholung dieser Reduction kommt man zuletzt, wenn m ungrade ist, auf:

$$\int \frac{dx}{x\sqrt{1-x^2}}$$

Um dies Integral zu finden, setze man:

$$\sqrt{1-x^2} = z,\ \ x = \sqrt{1-z^2},\ \ dx = -\frac{zdz}{\sqrt{1-z^2}}$$

$$\int \frac{dx}{x\sqrt{1-x^2}} = -\int \frac{dz}{1-z^2} = \tfrac{1}{2} l \frac{1-z}{1+z}$$

$$\int \frac{dx}{x\sqrt{1-x^2}} = \tfrac{1}{2} l \frac{1-\sqrt{1-x^2}}{1+\sqrt{1-x^2}} = l\left(\frac{1-\sqrt{1-x^2}}{x}\right)$$

Beispiel 1. $\int \frac{dx}{x^3\sqrt{1-x^2}} = -\frac{x^{-2}}{2}\cdot\sqrt{1-x^2} + \tfrac{1}{2}\int \frac{dx}{x\sqrt{1-x^2}}$

$$\int \frac{dx}{x^3\sqrt{1-x^2}} = -\frac{\sqrt{1-x^2}}{2x^2} + \tfrac{1}{2} l\left(\frac{1-\sqrt{1-x^2}}{x}\right)$$

Beispiel 2. $\int \frac{dx}{x^2\sqrt{1-x^2}} = -x^{-1}\sqrt{1-x^2} = -\frac{\sqrt{1-x^2}}{x}$

$$\int \frac{dx}{x^4\sqrt{1-x^2}} = \frac{x^{-3}\sqrt{1-x^2}}{-3} + \tfrac{2}{3}\int \frac{dx}{x^2\sqrt{1-x^2}}$$

$$\int \frac{dx}{x^4\sqrt{1-x^2}} = -\sqrt{1-x^2}\cdot\left[\tfrac{1}{3}\cdot\frac{1}{x^3} + \tfrac{2}{3}\cdot\frac{1}{x}\right]$$

337.

Schliesslich betrachten wir noch als hieher gehörend, das in der Mechanik vorkommende Differential:

$$\frac{x^m \cdot dx}{\sqrt{ax - x^2}} = x^m(ax - x^2)^{-\frac{1}{2}}dx$$

wo m eine ganze Zahl ist.

Durch Umformung desselben in:

$$x^m \cdot x^{-\frac{1}{2}}(a - x)^{-\frac{1}{2}}dx = x^{m-\frac{1}{2}}(a - x)^{-\frac{1}{2}}dx, \text{ hat man:}$$

$$\int \frac{x^m dx}{\sqrt{ax - x^2}} = \int x^{m-\frac{1}{2}}(a - x)^{-\frac{1}{2}}dx$$

mithin nach § 334, Formel III., indem hier $n = 1$, $b = -1$, $p = -\frac{1}{2}$ ist und $m - \frac{1}{2}$ statt m steht:

$$\int x^{m-\frac{1}{2}}(a - x)^{-\frac{1}{2}}dx = -\frac{x^{m-\frac{1}{2}}(a - x)^{\frac{1}{2}}}{m} + \frac{a(m - \frac{1}{2})}{m} \int x^{m-\frac{3}{2}}(a - x)^{-\frac{1}{2}}dx$$

oder weil $x^{m-\frac{1}{2}} = x^{m-1} x^{\frac{1}{2}}$ und $x^{m-\frac{3}{2}} = x^{m-1} x^{-\frac{1}{2}}$

$$\int \frac{x^m dx}{\sqrt{ax - x^2}} = -\frac{x^{m-1}\sqrt{ax - x^2}}{m} + \frac{a(2m - 1)}{2m} \int \frac{x^{m-1} dx}{\sqrt{ax - x^2}}$$

Durch Wiederholung dieser Reduction wird der Exponent m jedesmal um eine Einheit kleiner, und man kommt zuletzt auf das aus § 207, 2, bekannte Integral:

$$\int \frac{dx}{\sqrt{ax - x^2}} = \text{arc sin} \frac{2x - a}{a}$$

III. Integration der Kreisfunctionen.

338.

Um zunächst die Integrale der Kreisfunctionen:

$$\sin^m x \cdot \cos^n x dx, \quad \sin^m x \cdot dx, \quad \cos^m x dx$$

zu finden, wo m und n ganze positive oder negative Zahlen sind, könnte man:

$$\sin x = u, \quad \text{mithin} \cos x = \sqrt{1 - u^2} \quad \text{und} \quad dx = \frac{du}{\sqrt{1 - u^2}}$$

setzen, und dann unmittelbar die in § 334 aufgestellten

Reductionsformeln anwenden. Man kann hier aber auch folgendermaassen verfahren. Es ist zuerst:

$$\sin^m x \cdot \cos^n x dx = \sin^{m-1} x \cdot \cos^n x \sin x dx$$

folglich nach der theilweisen Integration:

$$\text{I.} \int \sin^m x \cos^n x dx = -\frac{\sin^{m-1} x \cdot \cos^{n+1} x}{n+1} + \frac{m-1}{n+1} \int \sin^{m-2} x \cdot \cos^{n+2} x dx$$

Durch diese Reduction wird der Exponent n jedesmal um zwei Einheiten vergrössert und gleichzeitig m um zwei Einheiten verkleinert, was zu Statten kommt, wenn n negativ und m positiv ist.

Will man bloss m verkleinern, ohne n zu verändern, so setze man in I.:

$$\cos^{n+2} x = \cos^n x(1 - \sin^2 x) = \cos^n x - \cos^n x \cdot \sin^2 x$$

so kommt nach gehöriger Reduction:

$$\text{II.} \int \sin^m x \cos^n x dx = -\frac{\sin^{m-1} x \cdot \cos^{n+1} x}{m+n} + \frac{m-1}{m+n} \int \sin^{m-2} x \cdot \cos^n x dx$$

Reducirt man diese Formel auf das Integral rechter Hand, setzt dann $m - 2 = m'$, also $m = m' + 2$ und schreibt zuletzt wieder m statt m', so ist:

$$\text{III.} \int \sin^m x \cos^n x dx = \frac{\sin^{m+1} x \cos^{n+1} x}{m+1} + \frac{m+n+2}{m+1} \int \sin^{m+2} x \cos^n x dx$$

Reducirt man Formel I. auf das Integral rechter Hand, setzt $m - 2 = m'$, $n + 2 = n'$ etc., so ist:

$$\text{IV.} \int \sin^m x \cos^n x dx = \frac{\sin^{m+1} x \cdot \cos^{n-1} x}{m+1} + \frac{n-1}{m+1} \int \sin^{m+2} x \cdot \cos^{n-2} x dx$$

Setzt man hierin:

$$\sin^{m+2} x = \sin^m x(1 - \cos^2 x) = \sin^m x - \sin^m x \cdot \cos^2 x$$

so erhält man durch eine ähnliche Reduction wie für Formel II.:

$$\text{V.} \int \sin^m x \cos^n x = \frac{\sin^{m+1} x \cos^{n-1} x}{m+n} + \frac{n-1}{m+n} \int \sin^m x \cos^{n-2} x dx$$

Reducirt man diese Formel auf das Integral rechter Hand und setzt dann n statt $n-2$, mithin $n+2$ statt n, so ist:

$$\text{VI.}\quad \int \sin^m x \cos^n x dx = -\frac{\sin^{m+1}x \cdot \cos^{n+1}x}{n+1} + \frac{m+n+2}{n+1}\int \sin^m x \cos^{n+2} x dx$$

339.

Setzt man in die II^te der vorstehenden sechs Reductionsformeln $n=0$, so hat man:

$$\int \sin^m x dx = -\frac{\sin^{m-1}x \cdot \cos x}{m} + \frac{m-1}{m}\int \sin^{m-2} x dx$$

und durch Wiederholung dieser Reduction:

$$\int \sin^{m-2} x dx = -\frac{\sin^{m-3} x \cos x}{m-2} + \frac{m-3}{m-2}\int \sin^{m-4} x dx$$

$$\vdots$$

1) m grade:

$$\text{I.}\quad \int \sin^m x dx = -\frac{\cos x}{m}\left[\sin^{m-1}x + \frac{m-1}{m-2}\sin^{m-3}x + .. + \frac{3.5..(m-3)(m-1)}{2.4..(m-4)(m-2)}\sin x\right] + \frac{1.3.5....(m-3)(m-1)}{2.4.6........(m-2)m}\cdot x$$

2) m ungrade:

$$\text{II.}\quad \int \sin^m x dx = -\frac{\cos x}{m}\left[\sin^{m-1}x + \frac{m-1}{m-2}\sin^{m-3}x + .. + \frac{2.4....(m-3)(m-1)}{1.3....(m-4)(m-2)}\right]$$

Setzt man in Formel II. § 338, $m=0$, so giebt dieselbe

1) n grade:

$$\text{III.}\quad \int \cos^n x dx = \frac{\sin x}{n}\left[\cos^{n-1}x + \frac{n-1}{n-2}\cos^{n-3}x + .. + \frac{3.5..(n-3)(n-1)}{2.4..(n-4)(n-2)}\cos x\right] + \frac{1\cdot 3\cdots(n-3)(n-1)}{2\cdot 4\cdots\cdots(n-2)n}x$$

2) n ungrade:

$$\text{IV.}\quad \int \cos^n x dx = \frac{\sin x}{n}\left[\cos^{n-1}x + \frac{n-1}{n-2}\cos^{n-3}x + .. + \left[\frac{2.4....(n-3)(n-1)}{1.3....(n-4)(n-2)}\right]\right]$$

IV. Integration einiger transcendenten Functionen.

340.

Die einzige Regel, welche sich für die Integration transcendenter Differentiale geben lässt, ist: die theilweise Integration oder Substitutionen zu versuchen. Ein paar der wichtigsten Fälle wollen wir hier mittheilen. Man hat z. B. durch theilweise Integration:

$$\int e^x \sin nx dx = \sin nx \cdot e^x - n\int e^x \cdot \cos nx dx$$

$$\int e^x \cos nx dx = \cos nx \cdot e^x + n\int e^x \cdot \sin nx dx$$

Multiplicirt man letztere Gleichung mit $-n$ und addirt sie dann zur ersten und fasst die gleichnamigen Integrale in Eins zusammen etc., so hat man:

$$\int e^x \sin nx = e^x\left(\frac{\sin nx - n\cos nx}{1+n^2}\right)$$

Multiplicirt man dagegen die erstere Gleichung mit n und addirt sie dann zur zweiten, so hat man zugleich auch:

$$\int e^x \cos nx dx = e^x \cdot \left(\frac{\cos nx + n\sin nx}{1+n^2}\right)$$

Ebenso findet man:

$$\int x^n \cos x dx = x^n \sin x - n\int x^{n-1} \sin x dx$$

$$\int x^{n-1} \sin x dx = -x^{n-1} \cos x + (n-1)\int x^{n-2} \cos x dx$$

Mithin die Reductionsformel:

$$\int x^n \cdot \cos x dx = x^{n-1}(x\sin x + n\cos x) - n(n-1)\int x^{n-2} \cos x dx$$

Beispiele:

1. $\int \frac{e^{2x}-1}{e^{2x}+1} \cdot dx = \int \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} \cdot dx = l(e^x + e^{-x})$

2. $\int x^m (lx)^n = \frac{(lx)^n \cdot x^{m+1}}{m+1} - \frac{n}{m+1}\int x^m . (lx)^{n-1} dx$

$$3. \int \frac{e^x x dx}{(1+x)^2} = \int \left(\frac{e^x}{1+x} - \frac{e^x}{(1+x)^2} \right) dx$$

$$\int \frac{e^x x dx}{(1+x)^2} = \int \frac{e^x dx}{1+x} - \int \frac{e^x}{(1+x)^2} dx$$

$$\int \frac{1}{1+x} e^x dx = \frac{1}{1+x} \cdot e^x + \int \frac{e^x}{(1+x)^2} dx$$

Letztere beiden Gleichungen addirt, kommt:

$$\int \frac{e^x \cdot x dx}{(1+x)^2} = \frac{e^x}{1+x}$$

341.

Folgende beiden Integrale verdienen noch bemerkt zu werden, nämlich:

$$\int \sin(mx+n) \cos(px+q) dx \text{ und } \int \frac{dx}{a+b\cos x}$$

Man hat zuerst (Trigon. § 100, 38):

$$\int \sin(mx+n) \cdot \cos(px+q) dx = \tfrac{1}{2} \int \sin[(m+p)x+n+q] dx$$
$$+ \tfrac{1}{2} \int \sin[(m-p)x+n-q] dx$$

$$\int \sin(mx+n) \cos(px+q) dx = -\frac{\cos[(m+p)x+n+q]}{2(m+p)}$$
$$- \frac{\cos[(m-p)x+n-q]}{2(m-p)}$$

Für das andere Integral hat man, $\cos^2 \frac{1}{2}x - \sin^2 \frac{1}{2}x$ statt $\cos x$ gesetzt:

$$\int \frac{dx}{a+b\cos x} = \int \frac{dx}{a+b\cos^2 \frac{1}{2}x - b\sin^2 \frac{1}{2}x}$$

$$= \int \frac{\frac{1}{\cos^2 \frac{1}{2}x} \cdot dx}{\frac{a}{\cos^2 \frac{1}{2}x} + b - b \cdot \operatorname{tg}^2 \frac{1}{2}x}$$

und weil $\frac{a}{\cos^2 \frac{1}{2}x} = a(1+\operatorname{tg}^2 \frac{1}{2}x)$ und $\frac{dx}{\cos^2 \frac{1}{2}x)} = 2d(\operatorname{tg} \frac{1}{2}x)$

$$\int \frac{dx}{a+b\cdot\cos x} = \int \frac{2\cdot d(\mathrm{tg}\,\tfrac{1}{2}x)}{a+b+(a-b)\,\mathrm{tg}^2\,\tfrac{1}{2}x} \quad \cdots\cdots(1)$$

Ist nun erstens: $a > b$, dann ist:

$$\int \frac{dx}{a+b\cos x} = \frac{2}{a-b}\int \frac{d\cdot \mathrm{tg}\,\tfrac{1}{2}x}{\frac{a+b}{a-b}+\mathrm{tg}^2\,\tfrac{1}{2}x} = \frac{2}{a-b}\int \frac{du}{\frac{a+b}{a-b}+u^2}$$

$$= \frac{2}{\sqrt{a^2-b^2}}\cdot \mathrm{arc\,tg}\,u\cdot\left(\frac{a-b}{a+b}\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$\int \frac{dx}{a+b\cos x} = \frac{2}{\sqrt{a^2-b^2}}\cdot \mathrm{arc\,tg}\left(\mathrm{tg}\,\tfrac{1}{2}x\cdot\sqrt{\frac{a-b}{a+b}}\right)$$

Ist aber zweitens: $a < b$, dann hat man aus (1):

$$\frac{dx}{a+b\cos x} = \frac{2}{b-a}\int \frac{d\cdot \mathrm{tg}\,\tfrac{1}{2}x}{\frac{b+a}{b-a}-\mathrm{tg}^2\,\tfrac{1}{2}x} = \frac{2}{b-a}\int \frac{du}{\frac{b+a}{b-a}-u^2}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{b^2-a^2}}\cdot l\left(\frac{\sqrt{b+a}+u\sqrt{b-a}}{\sqrt{b+a}-u\sqrt{b-a}}\right)$$

$$\int \frac{dx}{a+b\cos x} = \frac{1}{\sqrt{b^2-a^2}}\cdot l\left(\frac{\sqrt{b+a}+\mathrm{tg}\,\tfrac{1}{2}x\cdot\sqrt{b-a}}{\sqrt{b+a}-\mathrm{tg}\,\tfrac{1}{2}x\cdot\sqrt{b-a}}\right)$$

Ist endlich drittens: $a = b$, so hat man:

$$\int \frac{dx}{a(1+\cos x)} = \frac{1}{2a}\int \frac{dx}{\cos^2\tfrac{1}{2}x} = \frac{1}{a}\cdot \mathrm{tg}\,\tfrac{1}{2}x$$

Dreiundzwanzigstes Buch.

Eigenschaften bestimmter Integrale.

342.

Es ist bereits erklärt, was man unter bestimmtem Integral versteht, und wie dasselbe aus dem unbestimmten oder allgemeinen Integrale gefunden wird (§§ 221, 222). Ist nämlich:

$$\int f(x)\,dx = \mathrm{F}(x) + \mathrm{C}, \text{ so ist:}$$

$$\int_{x_0}^{x} f(x)\,dx = \mathrm{F}(x) - \mathrm{F}(x_0),$$

wobei jedoch die nothwendigen Bedingungen zu berücksichtigen sind, dass: 1) $f(x)$ nicht vieldeutig ist und sowohl für die Grenzen selbst, als auch innerhalb des ganzen Intervalls $x - x_0$ stets continuirlich sein muss, also weder imaginair noch unendlich wird, und 2) dass $f(x)$ innerhalb des Intervalls immer dasselbe Vorzeichen hat (§ 234).

Der Anfänger wird wohl thun, x als Abscisse, $f(x)$ als Ordinate und das bestimmte Integral als Summe unendlich schmaler Rechtecke zu denken.

343.

Hat $f(x)$ in gleichen Entfernungen (links und rechts) von der Mitte des Intervalls gleiche Werthe, so braucht man nur das Integral von der Mitte bis zu Ende oder von Anfang bis zur Mitte des Intervalls doppelt zu nehmen. Man hat z. B. aus:

$$\int \cos x dx = \sin x + \mathrm{C}$$

$$\int_{-\frac{1}{2}\pi}^{+\frac{1}{2}\pi} \cos x dx = 2\int_0^{\frac{1}{2}\pi} \cos x dx = 2$$

$$\int_0^{\pi} \sin^2 x dx = 2\int_0^{\frac{1}{2}\pi} \sin^2 x dx.$$

Sind aber die erwähnten, von der Mitte gleichweit entfernten Werthe von entgegengesetzten Vorzeichen, so besteht das Integral aus zwei gleichen entgegengesetzten Summen und ist also nicht in geometrischem, sondern in rein arithmetischem Sinne genommen, $=0$, z. B.:

$$\int_0^\pi \cos x dx = 0.$$

344.

Die bestimmten Integrale führen oftmals auf unerwartete, sehr merkwürdige Resultate. Ein paar Beispiele mögen genügen dies zu zeigen, indem wir wegen weiterer Verfolgung dieses unerschöpflichen Gegenstandes auf grössere Werke der Integral-Rechnung, z. B. Cauchy's, oder auf Minding's Integraltafeln verweisen.

345.

Aufgabe. Man suche den Werth des folgenden bestimmten Integrals:

$$\int_0^\infty \frac{dx}{(1+x^2)^n}$$

Auflösung. Zufolge § 328 Formel I. hat man (n als ganze Zahl genommen):

$$\int \frac{dx}{(1+x^2)^n} = \frac{1}{2(n-1)} \cdot \frac{x}{(1+x^2)^{n-1}} + \frac{2n-3}{2(n-1)} \int \frac{dx}{(1+x^2)^{n-1}}$$

der vom Integralzeichen befreite Theil wird für jede der beiden angegebenen Grenzen $=0$. Wir können ihn also weglassen und haben dann successive:

$$\int_0^\infty \frac{dx}{(1+x^2)^n} = \frac{2n-3}{2n-2} \int_0^\infty \frac{dx}{(1+x^2)^{n-1}}$$

$$\int_0^\infty \frac{dx}{(1+x^2)^{n-1}} = \frac{2n-5}{2n-4} \int_0^\infty \frac{dx}{(1+x^2)^{n-2}}$$

$$\vdots$$

$$\int_0^\infty \frac{dx}{(1+x^2)^2} = \frac{1}{2} \int_0^\infty \frac{dx}{1+x^2}$$

$$\int_0^\infty \frac{dx}{1+x^2} = \frac{\pi}{2}.$$

Multipliciren wir diese Gleichungen mit einander und lassen dann beiderseits die sich hebenden Factoren weg, so ist:

$$\int_0^{\infty} \frac{dx}{(1+x^2)^n} = \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \cdots \cdot (2n-3)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot \cdots \cdot (2n-2)} \cdot \frac{\pi}{2}.$$

346.

Aufgabe. Man suche den Werth des Integrals:

$$\int_0^{\infty} e^{-x} x^n dx.$$

Auflösung. Man hat hier zuerst:

$$\int x^n \cdot e^{-x} dx = -x^n \cdot e^{-x} + n \int e^{-x} \cdot x^{n-1} dx$$

hieraus folgt für die angegebenen Grenzen (§ 83) successive:

$$\int_0^{\infty} e^{-x} x^n dx = n \int_0^{\infty} e^{-x} x^{n-1} dx$$

$$\int_0^{\infty} e^{-x} x^{n-1} dx = (n-1) \int_0^{\infty} e^{-x} x^{n-2} dx$$

$$\vdots$$

$$\int_0^{\infty} e^{-x} x dx = 1 \cdot \int_0^{\infty} e^{-x} dx$$

$$\int_0^{\infty} e^{-x} dx = 1$$

folglich durch Multiplication etc.:

$$\int_0^{\infty} e^{-x} x^n dx = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots (n-1) n.$$

347.

Aufgabe. Man suche sowohl für ein grades als auch ungrades n den Werth des Integrals:

$$\int_0^1 \frac{x^n dx}{\sqrt{1-x^2}}$$

Auflösung. Zufolge § 335 hat man für:

1) n grade

$$\int_0^1 \frac{x^n dx}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \cdots \cdots (n-1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdots\cdots\cdots\cdots n} \cdot \frac{\pi}{2}$$

2) n ungrade

$$\int_0^1 \frac{x^n dx}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{2\cdot 4\cdot 6 \cdots\cdots (n-1)}{3\cdot 5\cdot 7 \cdots\cdots\cdots n}$$

Anmerkung. Weil in beiden Integralen für die äusserste obere Grenze, $\frac{x^n}{\sqrt{1-x^2}}$ unstetig wird, so scheint hier ein Verstoss gegen die § 342 erwähnte Bedingung gemacht zu sein. Die Richtigkeit des Integrals ergiebt sich aber, wenn man dasselbe als eine asymptotische Fläche betrachtet, wie in § 229 oder auch zufolge § 223, Anmerkung.

348.

Weil die Potenzen von echten Brüchen desto kleiner werden, je grösser der Exponent ist, so ist für alle Werthe von x zwischen 0 und 1 von folgenden drei Functionen:

$$\frac{x^{n-1}}{\sqrt{1-x^2}}, \quad \frac{x^n}{\sqrt{1-x^2}}, \quad \frac{x^{n+1}}{\sqrt{1-x^2}}$$

die erste grösser, die letzte kleiner als die mittlere. Dasselbe gilt offenbar auch, indem man ein Integral als Summe betrachtet, von den drei Integralen:

$$\int_0^1 \frac{x^{n-1}dx}{\sqrt{1-x^2}}, \quad \int_0^1 \frac{x^n dx}{\sqrt{1-x^2}}, \quad \int_0^1 \frac{x^{n+1}dx}{\sqrt{1-x^2}}$$

Sei nun n eine grade, mithin $n-1$ und auch $n+1$ eine ungrade Zahl, so ist nach vorhergehendem Paragraph:

$$\int_0^1 \frac{x^{n-1}dx}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{2\cdot 4\cdot 6\cdot 8 \cdots\cdots (n-4)(n-2)}{3\cdot 5\cdot 7\cdot 9 \cdots\cdots (n-3)(n-1)}$$

$$\int_0^1 \frac{x^n \cdot dx}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{1\cdot 3\cdot 5\cdot 7 \cdots\cdots (n-3)(n-1)}{2\cdot 4\cdot 6\cdot 8 \cdots\cdots\cdots (n-2)\cdot n} \cdot \frac{\pi}{2}$$

$$\int_0^1 \frac{x^{n+1}dx}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{2\cdot 4\cdot 6\cdot 8 \cdots\cdots (n-2)}{3\cdot 5\cdot 7\cdot 9 \cdots\cdots (n-1)} \cdot \frac{n}{n+1}$$

Das letzte Integral weicht vom erstern nur in dem Factor $\frac{n}{n+1}$ ab. Für ein sehr grosses n werden beide Integrale näherungsweise und für $n = \infty$ vollkommen gleich, weil dann der Bruch $\frac{n}{n+1} = \frac{1}{1+\frac{1}{n}} = \frac{1}{1+\frac{1}{\infty}} = 1$ wird. Das zwischen beiden liegende

mittlere Integral wird also für $n = \infty$ jedem gleich. Dies giebt uns nun den bereits von Wallis gefundenen merkwürdigen Ausdruck für die Zahl π. Es ist nämlich, wenn man die Factorreihen bis in's Unendliche fortlaufen lässt:

$$\frac{\pi}{2} = \frac{2 \cdot 2 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 6 \cdot 8 \cdot 8 \cdots}{1 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 7 \cdot 9 \cdots}$$

349.

Von wissenschaftlichem Interesse, namentlich für die Wahrscheinlichkeits-Rechnung, ist die Bestimmung des Integrals:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} dx$$

Dieses Integral lässt sich auf verschiedene Weise finden. Wir wählen hier Cauchy's Verfahren, welches Encke im Berliner astronomischen Jahrbuch für 1834 mittheilt.

Cauchy betrachtet daselbst zuerst das doppelte Integral:

$$V = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-(x^2+y^2)} dx dy,$$

welches in geometrischem Sinne das Volumen eines Körpers bedeutet, für dessen Oberfläche:

$$z = e^{-(x^2+y^2)} = e^{-x^2} \cdot e^{-y^2} \quad \cdots\cdots\cdots\cdots (1)$$

die Gleichung ist, und wo also x, y ganz unabhängig veränderliche Grössen sind, die sich beide von 0 bis $\pm \infty$ erstrecken, mithin dieselben Integrationsgrenzen haben.

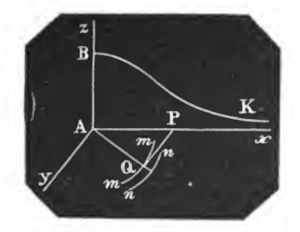
Integrirt man erst in Bezug auf y und setzt einstweilen den Werth des unbekannten Integrals:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-y^2} dy = L, \text{ so ist offenbar:}$$

$$V = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} dx \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-y^2} dy = L \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} dx$$

mithin, wenn man jetzt nach x integrirt: $V = L^2 \cdots\cdots (2)$

Denkt man sich in der Gleichung (1) $y = 0$ und dann für x alle möglichen Werthe von $x = 0$ bis $x = \pm \infty$ gesetzt, so erhält



man einen durch die Achsen der x und z gelegten Durchschnitt (eine asymptotische Fläche, wovon nur die eine Hälfte ABK dargestellt ist).

Es ist nun leicht einzusehen, dass alle Durchschnitte durch die Achse der z einander vollkommen gleich sind; denn die Entfernung eines Punctes, Q, in der Ebene der x, y ist $= \sqrt{x^2 + y^2}$. Alle Puncte in der Ebene der x, y, die gleichweit, um $AQ = r$, vom Anfangspunct A entfernt sind, mithin in einem Kreise, mm, liegen, für welche also $x^2 + y^2 = r^2$ ist, haben offenbar einerlei z, nämlich: $z = e^{-r^2} = MQ$; folglich sind alle erwähnten Durchschnitte gleich, und man kann sich den Körper durch Umdrehung der asymptotischen Fläche ABK, um die Achse der z entstanden denken. Denkt man sich die mit den Radien r und $r + dr$ in der Ebene der x, y beschriebenen Bogen mm, nn zu ganzen Kreisen ergänzt und in denselben Cylinderflächen, senkrecht auf die Ebene der x, y errichtet, so erhält man offenbar eine unendlich dünne sogenannte Cylinderschale, deren innerer Radius $= r$, deren Dicke $= dr$ und deren Höhe $z = e^{-r^2}$. Es ist demnach das Differential des Körpers:

$$dV = 2r\pi \cdot e^{-r^2} dr.$$

Das Integral muss nun, um den ganzen in solche unendlich dünne Cylinderschalen (Elemente) zerlegt gedachten Körper zu erhalten, offenbar von $r = 0$ bis $r = \infty$ genommen werden, daher, weil allgemein:

$$\int e^{-r^2} r dr = -\tfrac{1}{2} e^{-r^2} + C$$

$$V = 2\pi \int_0^\infty e^{-r^2} r dr = \pi.$$

Mithin ist vermöge Gleichung (2) $L^2 = \pi$, also $L = \sqrt{\pi}$, daher:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi} \text{ und } \int_0^\infty e^{-x^2} dx = \tfrac{1}{2}\sqrt{\pi}.$$

Vierundzwanzigstes Buch.

Integration durch Differentiation unter dem Integralzeichen.

350.

Eine sehr weit greifende Methode, unzählige, sowohl bestimmte als unbestimmte Integrale zu finden, geht aus dem schon von Leibnitz aufgestellten Satze hervor, dass es einerlei ist: ob man von einem zu integrirenden Differential, $f(x, a)dx$, in Bezug auf eine darin vorkommende unabhängige constante Grösse (Parameter), a, zuvor die Derivirte nimmt und dann integrirt, oder ob man erst integrirt und dann in Bezug auf jene Constante die Derivirte nimmt.

Um zuerst den Sinn dieses Satzes richtig aufzufassen, möge ein Erläuterungsbeispiel voraufgehen. Es ist z. B.:

$$\int(3ax^2 + a^3b)\,dx = ax^3 + a^3bx + C$$

Differentiiren wir die Function unter dem Integralzeichen in Bezug auf a und dividiren durch da (indem man x als constant betrachtet), so ist:

$$\int\frac{d\cdot(3ax^2 + a^3b)dx}{da} = \int(3x^2 + 3a^2b)\,dx = x^3 + 3a^2bx + C'$$

Differentiiren wir dagegen das zuvor gefundene Integral, so ist:

$$\frac{d\cdot(ax^3 + a^3bx + C)}{da} = x^3 + 3a^2bx$$

also ganz dasselbe wie vorhin, wenn man daselbst die willkürliche Constante $C' = 0$ setzt, oder auch dem letzteren Resultat dieselbe willkürliche Constante C' hinzufügt.

Um nun die allgemeine Richtigkeit dieses Satzes einzusehen, braucht man in: $\int f(x, \alpha)\,dx$ nur $\alpha + \Delta\alpha$ statt α zu setzen, so ist, wenn man die Aenderung des Integrals mit $\Delta_\alpha\int f(x, \alpha)\,dx$ bezeichnet:

$$\Delta_\alpha \int f(x, \alpha)\,dx = \int f(x, \alpha + \Delta\alpha)\,dx - \int f(x, \alpha)\,dx$$

$$\Delta_\alpha \int f(x, \alpha)\,dx = \int [f(x, \alpha + \Delta\alpha) - f(x, \alpha)]\,dx$$

und wenn man jetzt $f(x, \alpha + \Delta\alpha)$ entwickelt (§ 161):

$$\Delta_\alpha \int f(x, \alpha)\,dx = \int [f(x, \alpha) + f'_\alpha(x, \alpha)\Delta\alpha + \cdots - f(x, \alpha)]\,dx$$

$$\Delta_\alpha \int f(x, \alpha)\,dx = \int \left[f'_\alpha(x, \alpha)\Delta\alpha + f''_\alpha(x, \alpha)\frac{\Delta\alpha^2}{1 \cdot 2} + \cdots\right]dx$$

$$\Delta_\alpha \int \frac{f(x, \alpha) \cdot dx}{\Delta\alpha} = \int \left[f'(x, \alpha) + f''_\alpha(x, \alpha)\frac{\Delta\alpha}{1 \cdot 2} + \cdots\right]dx$$

Geht man jetzt auf die Grenze über, so ist für $\Delta\alpha = 0$:

$$\frac{d \cdot (\int f(x, \alpha)\,dx)}{d\alpha} = \int \frac{d \cdot (f(x, \alpha)\,dx)}{d\alpha}$$

351.

Dasselbe Verfahren kann man offenbar, wenn die Constante α nicht verschwindet, beliebig oft wiederholen und dann aus einem gefundenen Integral so viele neue ableiten, als man nur will, und welche man auf directe Weise schwerlich gefunden haben würde.

Da nun die durch Differentiation unter dem Integralzeichen gefundenen allgemeinen Integrale (indem man jedesmal eine willkürliche Constante, c, hinzufügt) für jeden Werth von x und α, für welche selbstverständlich $f(x, \alpha)$ stetig ist, gültig sind, so ist auch:

$$\frac{d \cdot \left(\int_{x_0}^{x_1} f(x, \alpha)\,dx\right)}{d\alpha} = \int_{x_0}^{x^1} \frac{d \cdot (f(x, \alpha)\,dx)}{d\alpha}$$

352.

Beispiel 1. Wir haben z. B.:

$$\int \frac{dx}{a^2 + x^2} = \frac{1}{a} \cdot \operatorname{arc\,tg}\left(= \frac{x}{a}\right) + C \cdots\cdots (1)$$

und durch Differentiation in Bezug auf a:

$$\int \frac{-2a\,dx}{(a^2 + x^2)^2} = -\operatorname{arc\,tg}\frac{x}{a} \cdot \frac{1}{a^2} - \frac{1}{a} \cdot \frac{x}{a^2 + x^2}$$

$$\int \frac{dx}{(a^2 + x^2)^2} = \frac{x}{2a^2(a^2 + x^2)} + \frac{1}{2a^3} \cdot \operatorname{arc\,tg}\frac{x}{a} + C \cdots (2)$$

Ferner hat man aus (1):

$$\int_0^{\infty} \frac{dx}{a^2+x^2} = \frac{1}{a} \cdot \frac{\pi}{2}$$

und wenn man in Bezug auf a differentiirt:

$$\int_0^{\infty} \frac{-2adx}{(a^2+x^2)^2} = -\frac{1}{a^2} \cdot \frac{\pi}{2}$$

$$\int_0^{\infty} \frac{dx}{(a^2+x^2)^2} = \frac{\pi}{4a^3}$$

Dies letztere bestimmte Integral erhält man also direct aus (1), ohne erst das allgemeine Integral (2) entwickeln zu brauchen.

353.

Beispiel 2. Durch wiederholtes Differentiiren (welches wir rechter Hand nur andeuten) erhält man aus:

$$\int \frac{dx}{a+x^2} = \frac{1}{\sqrt{a}} \cdot \operatorname{arc\,tg} \frac{x}{\sqrt{a}} + C$$

$$\int \frac{-1 \cdot dx}{(a+x^2)^2} = d \cdot \frac{\left(a^{-\frac{1}{2}} \cdot \operatorname{arc\,tg} \frac{x}{\sqrt{a}}\right)}{da} + C$$

$$\int \frac{1 \cdot 2dx}{(a+x^2)^3} = \frac{d^2 \cdot \left(a^{-\frac{1}{2}} \cdot \operatorname{arc\,tg} \frac{x}{\sqrt{a}}\right)}{da^2} + C$$

$$\vdots$$

$$\int \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots n dx}{(a+x^2)^{n+1}} = \frac{d^n\left(a^{-\frac{1}{2}} \operatorname{arc\,tg} \frac{x}{\sqrt{a}}\right)}{da^n} + C$$

$$\int_0^{\infty} \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots n dx}{(1+x^2)^{n+1}} = \frac{\pi}{2} \cdot \frac{d^n \cdot (a^{-\frac{1}{2}})}{da^n} = \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2n-1)}{2^n a^n \sqrt{a}} \frac{\pi}{2}$$

und wenn man jetzt $a = 1$ setzt:

$$\int_0^{\infty} \frac{dx}{(1+x^2)^{n+1}} = \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2n-1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdots\cdots 2n} \cdot \frac{\pi}{2}$$

354.

Beispiel 3. Durch wiederholtes Differentiiren der beiden Integrale:

$$\int e^{\pm ax} dx; \quad \int_0^{\infty} x^n e^{-ax} dx$$

in Bezug auf a erhält man (Cauchy T. II. pag. 76):

$$\int x^n e^{\pm ax} dx = \pm \frac{d^n \cdot (a^{-1} e^{\pm ax})}{da^n} + C$$

$$\int_0^x x^n e^{-ax} dx = \frac{d^n \cdot (a^{-1})}{da^n} = \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \cdots \cdot n}{a^{n+1}}$$

355.

Eine andere Methode, bestimmte Integrale zu finden, besteht in der sogenannten Integration unter dem Integralzeichen in Bezug auf eine als veränderlich betrachtete Constante (Parameter) und beruht auf dem Satze, dass bei Bestimmung eines Doppelintegrals:

$$\int_{y_0}^{y} \int_{x_0}^{x} f(x, y)\, dx dy$$

die Ordnung der beiden Integrationen beliebig ist, d. h. wenn x, y von einander unabhängig sind und $f(x, y)$ innerhalb der angegebenen Grenzen stetig ist und kein Zeichenwechsel Statt findet, so ist es einerlei, ob man erst in Bezug auf y und dann in Bezug auf x oder umgekehrt erst in Bezug auf x und dann in Bezug auf y integrirt. Dieser Satz folgt schon auf anschauliche Weise aus § 257, lässt sich aber auch folgendermassen beweisen. Es ist erstlich (§ 350):

$$\frac{d \cdot \left(\int_{x_0}^{x} F(x, \alpha) dx \right)}{d\alpha} = \int_{x_0}^{x} \frac{d \cdot (F(x, \alpha)\, dx)}{d\alpha} \cdots\cdots (1)$$

Man setze: $F(x, \alpha) = \int_{\alpha_0}^{\alpha} f(x, \alpha) \cdot d\alpha$

mithin: $F(x, \alpha)\, dx = \int_{\alpha_0}^{\alpha} f(x, \alpha)\, d\alpha \cdot dx \cdot \cdots\cdots (2)$

$$\frac{d \cdot (F(x, \alpha)\, dx)}{d\alpha} = f(x, \alpha)\, dx \cdots\cdots\cdots (3)$$

Die in (2) und (3) erhaltenen Ausdrücke in (1) substituirt, ist:

$$\frac{d \cdot \int_{x_0}^{x} \int_{\alpha_0}^{\alpha} f(x, \alpha)\, d\alpha dx}{d\alpha} = \int_{x_0}^{x} f(x, \alpha)\, dx$$

$$d \cdot \int_{x_0}^{x} \int_{\alpha_0}^{\alpha} f(x, \alpha)\, d\alpha dx = \int_{x_0}^{x} f(x, \alpha)\, dx d\alpha.$$

Das Zeichen d bezieht sich auf α. Integrirt man also in

Bezug auf α, so ist, weil die Zeichen $\int$ und d sich heben, wie behauptet:

$$\int_{x_0}^{x}\int_{\alpha_0}^{\alpha} f(x, \alpha)\,d\alpha\,dx = \int_{\alpha_0}^{\alpha}\int_{x_0}^{x} f(x, \alpha)\,dx\,d\alpha$$

356.

Vorstehender Satz, über die willkürliche Aufeinanderfolge der Integrationen, lässt sich offenbar auf dieselbe Weise auf vielfache Integrale ausdehnen.

Um nun zu zeigen, wie man durch Anwendung desselben bestimmte Integrale finden kann, zu welchen die entsprechenden allgemeinen Integrale nicht zu finden sind, nehmen wir folgendes Beispiel.

Sei m eine positive Zahl, so folgt aus:

$$\int x^{m-1}dx = \frac{x^m}{m} + C$$

$$\int_0^1 x^{m-1}dx = \frac{1}{m}$$

Multipliciren wir mit dm, so ist:

$$\int_0^1 x^{m-1}dx\,dm = \frac{dm}{m}$$

mithin: $$\int_{m_0}^{m}\int_0^1 x^{m-1}dx\,dm = \int_{m_0}^{m}\frac{dm}{m}$$

oder: $$\int_0^1\int_{m_0}^{m} x^{m-1}dx\,dm = \int_{m_0}^{m}\frac{dm}{m} \quad \cdots\cdots\cdots\cdots (1)$$

Integriren wir also erst in Bezug auf m, indem wir x als constant behandeln, so ist (§ 195, 3):

$$\int x^{m-1}dm = \frac{x^{m-1}}{lx} + C$$

mithin: $$\int_{m_0}^{m} x^{m-1}dm = \frac{x^{m-1} - x^{m_0-1}}{lx}$$

Wird dies in Bezug auf m gefundene Integral linker Hand in (1) substituirt, so ist:

$$\int_0^1 \frac{x^{m-1} - x^{m_0-1}}{lx}\cdot dx = l\left(\frac{m}{m_0}\right)$$

$$\int_0^1 \frac{x^m - x^{m_0}}{lx}\cdot\frac{dx}{x} = l\left(\frac{m}{m_0}\right)$$

357.

Aufgabe. Man suche, was aus dem Integral:

$$\int_0^\infty e^{-ax}dx$$

wird, indem man es mit da multiplicirt und dann von $a = a_0$ bis a integrirt (a, a_0 als positiv vorausgesetzt).

Auflösung. Man hat hier:

$$\int e^{-ax}dx = -\frac{1}{a}\cdot e^{-ax} + C$$

$$\int_0^\infty e^{-ax}dx = \frac{1}{a}$$

$$\int_0^\infty dx\int_{a_0}^a e^{-ax}da = \int_{a_0}^a \frac{da}{a} = l\left(\frac{a}{a_0}\right)$$

Nun ist: $$\int e^{-ax}da = -\frac{1}{x}\cdot e^{-ax} + C$$

$$\int_{a_0}^a e^{-ax}da = \frac{e^{-a_0x} - e^{-ax}}{x}$$

$$\int_0^\infty \frac{e^{-a_0x} - e^{-ax}}{x}\cdot dx = l\left(\frac{a}{a_0}\right)$$

358.

Von den übrigen verschiedenen Methoden, bestimmte Integrale zu finden, erwähnen wir schliesslich noch folgende von Laplace und die darin besteht, das gesuchte Integral durch Differentiation in Bezug auf eine Constante, erst auf ein anderes leichter zu findendes Integral zu bringen, aus welchem sich das eigentlich gesuchte ableiten lässt. Man habe z. B. das Integral:

$$\int_0^\infty e^{-a^2x^2}\cos bx dx$$

zu bestimmen. Setzt man dasselbe $= u$ und differentiirt in Bezug auf b, so ist (§ 350):

$$\frac{du}{db} = -\int_0^\infty e^{-a^2x^2}\cdot x\sin bx dx$$

Durch theilweise Integration hat man nun:

$$\int e^{-a^2x^2}x\cdot\sin bx dx = -\frac{1}{2a^2}\cdot e^{-a^2x^2}\cdot\sin bx + \frac{b}{2a^2}\int e^{-a^2x^2}\cos bx dx$$

Der vom Integralzeichen befreite Theil verschwindet für $x = 0$ und für $x = \infty$, daher:

$$\int_0^{\infty} e^{-a^2x^2} \cdot x \sin bx dx = \frac{b}{2a^2}\int_0^{\infty} e^{-a^2x^2} \cos bx dx$$

folglich auch, weil das Integral rechter Hand $= u$ gesetzt worden und wie oben gefunden, das Integral linker Hand $= -\frac{du}{db}$ ist:

$$\frac{du}{db} = -\frac{b}{2a^2} \cdot u, \text{ also: } \frac{du}{u} = -\frac{b \cdot db}{2a^2}$$

$$lu = -\frac{b^2}{4a^2} + lc, \text{ oder: } l\left(\frac{u}{c}\right) = -\frac{b^2}{4a^2}$$

$$u = c \cdot e^{-\frac{b^2}{4a^2}}$$

$$\int_0^{\infty} e^{-a^2x^2} \cos bx dx = c \cdot e^{-\frac{b^2}{4a^2}}$$

Geben wir der willkürlichen Constante den Werth, welchen das gesuchte Integral für $b = 0$ erhält, nämlich:

$$\int_0^{\infty} e^{-a^2x^2} dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2a} \text{ (§ 349), so hat man:}$$

$$\int_0^{\infty} e^{-a^2x^2} \cos bx dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2a} \cdot e^{-\frac{b^2}{4a^2}}$$

Anmerkung. Mehreres über bestimmte Integrale, so wie auch die sogenannten Gamma- und Beta-Functionen und anderer Euler'schen Integrale findet der sich hierfür Interessirende in Cauchy's grösserem Werke.

Fünfundzwanzigstes Buch.

Euler's Summationsformel.

359.

So wie die Differential-Rechnung angewandt werden kann, auf indirecte Weise Reihen zu summiren, indem man von einem bekannten Fall ausgeht, so lässt sich auf ähnliche Weise auch die Integral-Rechnung zur Summation der Reihen benutzen, indem man statt auf beiden Seiten die Derivirten zu nehmen (§ 37), auf beiden Seiten mit dx, oder auch mit $\varphi(x)dx$, multiplicirt und dann integrirt.

Man hat z. B. (Analysis § 77):

$$-l(1-x) = x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \frac{x^4}{4} + \cdots\cdot\cdot$$

Multiplicirt man beiderseits mit dx und integrirt, so kommt: *)

$$x + (1-x)\,l(1-x) = \frac{x^2}{1\cdot 2} + \frac{x^3}{2\cdot 3} + \frac{x^4}{3\cdot 4} + \frac{x^5}{4\cdot 5} + \cdots\cdot \quad (1)$$

---

*) Setzt man $1 - x = u$, also $dx = -du$, so hat man:

$$-\int l(1-x)\,dx = \int lu\cdot du = lu\cdot u - u$$

$$-\int l(1-x)\,dx = (1-x)\,l(1-x) - 1 + x + c$$

Weil für $x = 0$ die Summe der Reihe $= 0$ ist, so muss auch das Integral für $x = 0$ verschwinden, folglich die Constante $c = 1$ sein.

Setzt man $x = 1$, so ist (§ 84):

$$1 = \frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} + \frac{1}{3\cdot 4} + \frac{1}{4\cdot 5} + \cdots \text{ in inf.}$$

Multiplicirt man die Gleichung (1) beiderseits wieder mit dx und integrirt, so kommt:

$$\tfrac{3}{4}x^2 - \tfrac{1}{2}x - \frac{(1-x)^2}{2}\, l(1-x) = \frac{x^3}{1\cdot 2\cdot 3} + \frac{x^4}{2\cdot 3\cdot 4} + \frac{x^5}{3\cdot 4\cdot 5} + \cdots$$

Setzt man $x = 1$, so ist (§ 84):

$$\tfrac{1}{4} = \frac{1}{1\cdot 2\cdot 3} + \frac{1}{2\cdot 3\cdot 4} + \frac{1}{3\cdot 4\cdot 5} + \cdots \text{ in inf.}$$

Setzt man $x = \frac{1}{2}$, so ist (weil $-\frac{1}{8}l(\frac{1}{2}) = \frac{1}{8}l2$):

$$\tfrac{1}{8}l2 - \tfrac{1}{16} = \frac{1}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 2^3} + \frac{1}{2\cdot 3\cdot 4\cdot 2^4} + \frac{1}{3\cdot 4\cdot 5\cdot 2^5} + \cdots \text{ in inf.}$$

Wir erwähnen jedoch diese indirecte Methode (deren es noch mehrere giebt, nur beiläufig, indem wir, in Betreff der Summation der Reihen, hier nur ein directes Verfahren, nämlich die nach Euler benannte Summationsformel mittheilen wollen, weil sie in vielen Fällen nützlich ist. Eine allgemeine Methode, alle Reihen zu summiren, giebt es nicht.

360.

In der Voraussetzung, dass die Function $\varphi(x)$ sowohl, als auch ihre sämmtlichen Derivirten stetig sind, sei $\varphi(x)$ das allgemeine Glied einer Reihe, die entsteht, indem man $x = x_0,\ x_0 + h,\ x_0 + 2h, \cdots x_0 + nh$ setzt. Die Summe dieser Reihe wollen wir mit $\sum_{x_0}^{x_0+nh} \varphi(x)$ bezeichnen, so dass:

$$\sum_{x_0}^{x_0+nh} \varphi(x) = \varphi(x_0) + \varphi(x_0+h) + \varphi(x_0+2h) + \cdots + \varphi(x_0+nh) \cdots (1)$$

Euler lässt nun die Summe von den Derivirten $\varphi'(x)$, $\varphi''(x) \cdots$ und von dem Integrale $\int \varphi(x)dx$ abhängen, zu welchem Resultat man folgendermassen gelangen kann.

Zufolge § 272, (3) ist:

$$\left.\begin{aligned}
\int_{x_0}^{x_0+h}\varphi(x)dx &= \varphi(x_0)\cdot h+\varphi'(x_0)\cdot\frac{h^2}{1\cdot 2}+\varphi''(x_0)\cdot\frac{h^3}{1\cdot 2\cdot 3}+\cdots\cdots \\
\int_{x_0+h}^{x_0+2h}\varphi(x)dx &= \varphi(x_0+h)\cdot h+\varphi'(x_0+h)\cdot\frac{h^2}{1\cdot 2}+\varphi''(x_0+h).\frac{h^3}{1\cdot 2\cdot 3}+\cdots \\
&\vdots \\
\int_{x_0+nh}^{x_0+nh+h}\varphi(x)dx &= \varphi(x_0+nh)h+\varphi'(x_0+nh)\cdot\frac{h^2}{1\cdot 2}+\varphi''(x_0+nh).\frac{h^3}{1.2.3}+\cdots
\end{aligned}\right\}\cdots(2)$$

Addiren wir diese Gleichungen (2) und bemerken, dass:

$$\int_{x_0}^{x_0+h}\varphi(x)dx+\int_{x_0+h}^{x_0+2h}\varphi(x)dx+\cdots+\int_{x_0+nh}^{x_0+nh+h}\varphi(x)dx=\int_{x_0}^{x_0+nh+h}\varphi(x)dx$$

$$\varphi'(x_0)+\varphi'(x_0+h)+\varphi'(x_0+2h+\cdots\cdot+\varphi'(x_0+nh)=\sum_{x_0}^{x_0+nh}\varphi'(x)$$

etc. etc.

so ist, indem wir, des bequemern Schreibens halber, die Grenzen nicht andeuten, jedoch im Sinne behalten:

$$\int\varphi(x)dx=h\Sigma\varphi(x)+\frac{h^2}{1\cdot 2}\cdot\Sigma\varphi'(x)+\frac{h^3}{1\cdot 2\cdot 3}\cdot\Sigma\varphi''(x)+\cdots(3)$$

wo nun rechter Hand jede Summe von dem beliebigen Ausgangswerth von $x=x_0$ bis zu dem beliebigen Endwerth von $x=x_0+nh$, linker Hand das Integral aber von x_0 bis x_0+nh+h zu nehmen ist.

Weil die Gleichung (3) allgemein für jede Function von x gültig ist, so kann man linker Hand statt $\int\varphi(x)\cdot dx$ auch $\int\varphi'(x)\cdot dx$, $\int\varphi''(x)\cdot dx, \cdots$ setzen und hat dann gleicherweise:

$$\begin{aligned}
\int\varphi'(x)dx &= h\cdot\Sigma\varphi'(x)+\frac{h^2}{1\cdot 2}\cdot\Sigma\varphi''(x)+\cdots \\
\int\varphi''(x)dx &= h\cdot\Sigma\varphi''(x)+\frac{h^2}{1\cdot 2}\cdot\Sigma\varphi'''(x)+\cdots \\
\int\varphi'''(x)dx &= h\cdot\Sigma\varphi'''(x)+\frac{h^2}{1\cdot 2}\cdot\Sigma\varphi^{IV}(x)+\cdots \\
&\vdots
\end{aligned}$$

Multiplicirt man die erste dieser Gleichungen mit αh, die zweite mit $\alpha' h^2$, die dritte mit $\alpha'' h^3, \cdots$ und addirt sie alle zur vorhergehenden Gleichung (3), so lassen sich die Coefficienten $\alpha, \alpha', \alpha'', \cdots$ so bestimmen, dass die Summen $\Sigma\varphi'(x)$, $\Sigma\varphi''(x) \cdots$ alle eliminirt werden. Damit nämlich bei der Addition der Gleichungen:

$$\int\varphi(x)dx = h.\Sigma\varphi(x) + \frac{h^2}{1.2}.\Sigma\varphi'(x) + \frac{h^3}{1.2.3}.\Sigma\varphi''(x) + \frac{h^4}{1.2.3.4}.\Sigma\varphi'''(x) + ..$$

$$\alpha h\int\varphi'(x)dx = \cdots + \alpha h^2.\Sigma\varphi'(x) + \frac{\alpha h^3}{1\cdot 2}\cdot\Sigma\varphi''(x) + \frac{\alpha h^4}{1\cdot 2\cdot 3}.\Sigma\varphi'''(x) + ..$$

$$\alpha' h^2\int\varphi''(x)dx = \cdots\cdots\cdots + \alpha' h^3\cdot\Sigma\varphi''(x) + \frac{\alpha' h^4}{1\cdot 2}.\Sigma\varphi'''(x) + ..$$

$$\vdots$$

die Functionen $\Sigma\varphi'(x)$, $\Sigma\varphi''(x), \cdots$ herausfallen, müssen die fraglichen Coefficienten $\alpha, \alpha', \alpha'', \alpha''' \cdots$ so bestimmt werden, dass sie folgenden, nach einer in die Augen springenden Recursionsregel zu bildenden Gleichungen:

$$\left.\begin{aligned}
&\alpha + \frac{1}{1\cdot 2} = 0 \\
&\alpha' + \frac{\alpha}{1\cdot 2} + \frac{1}{1\cdot 2\cdot 3} = 0 \\
&\alpha'' + \frac{\alpha'}{1\cdot 2} + \frac{\alpha}{1\cdot 2\cdot 3} + \frac{1}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4} = 0 \\
&\alpha''' + \frac{\alpha''}{1\cdot 2} + \frac{\alpha'}{1\cdot 2\cdot 3} + \frac{\alpha}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4} + \frac{1}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5} = 0 \\
&\vdots
\end{aligned}\right\} \cdots (4)$$

Genüge leisten, was, wie man sieht, möglich ist. Die erwähnte Addition giebt dann für die gesuchte Summe die Gleichung:

$$\Sigma\varphi(x) = \frac{1}{h}\int\varphi(x)\,dx + \alpha\int\varphi'(x)\,dx + \alpha' h\int\varphi''(x)\,dx + \cdots (5)$$

361.

Eine allgemeine Formel aufzustellen, nach welcher man jeden der immer kleiner werdenden Coefficienten $\alpha, \alpha', \alpha'' \cdots$ direct

berechnen könnte, würde auf grosse Weitläufigkeiten führen. *) Es genügt aber, nur die zwei, drei ersten zu bestimmen, und diese erhält man leicht aus den Gleichungen (4), nämlich: $\alpha = -\frac{1}{2}$, $\alpha' = \frac{1}{12}$, $\alpha'' = 0$, $\alpha''' = -\frac{1}{720}$, $\alpha^{IV} = 0$, $\alpha^{V} = \frac{1}{30240}$.

Substituiren wir diese Werthe in (5) und beachten zugleich, dass offenbar $\int \varphi'(x)\,dx = \varphi(x)$, $\int \varphi''(x)\,dx = \varphi'(x)$, so ist die allgemeine Summationsformel:

$$\Sigma\varphi(x) = \frac{1}{h}\int \varphi(x)dx - \tfrac{1}{2}\varphi(x) + \frac{h}{12}\cdot\varphi'(x) - \frac{h^3}{720}\varphi'''(x) + \frac{h^5}{30240}\varphi^{V}(x) - ..$$

362.

Bei der Anwendung vorstehender Summationsformel ist jedoch nicht zu vergessen, dass wenn linker Hand die Summe $\Sigma\varphi(x)$ von dem beliebigen Ausgangswerth $\varphi(x_0)$ bis zu $\varphi(x_0 + nh)$ genommen werden soll, sämmtliche Integrale rechter Hand, nämlich auch die vom Integralzeichen befreiten Integrale $\varphi(x) = \int \varphi'(x)dx$; $\varphi'(x) = \int \varphi''(x)\,dx, \cdots$ alle innerhalb der Grenzen von x_0 bis $x_0 + nh + h$ genommen werden müssen. Will man auch noch diesen kleinen Uebelstand beseitigen und die oberen Grenzen auf beiden Seiten gleich haben (die unteren sind es ja), so kann man dies folgendermassen bewirken. Es ist (§ 234):

$$\int_{x_0}^{x_0+nh+h} \varphi(x)dx = \int_{x_0}^{x_0+nh} \varphi(x)dx + \int_{x_0+nh}^{x_0+nh+h} \varphi(x)dx$$

oder, das zweite Integral rechter Hand in eine Reihe entwickelt (§ 272, (3)), und diese substituirt, kommt:

$$\int_{x_0}^{x_0+nh+h} \varphi(x)dx = \int_{x_0}^{x_0+nh} \varphi(x)dx + h\cdot\varphi(x) + \frac{h^2}{1\cdot 2}\varphi'(x) + \frac{h^3}{1\cdot 2\cdot 3}\cdot\varphi''(x) + \cdots$$

$$\frac{1}{h}\int_{x_0}^{x_0+nh+h} \varphi(x)dx = \frac{1}{h}\int_{x_0}^{x_0+nh} \varphi(x)\,dx + \varphi(x) + \frac{h}{1\cdot 2}\varphi'(x) + \frac{h^2}{1\cdot 2\cdot 3}\cdot\varphi''(x) + \cdots$$

*) Man sehe hierüber Klügel's mathematisches Wörterbuch 4. Theil, oder Lacroix T. III. in 4°, woselbst auch gezeigt wird, dass alle Coefficienten mit gradem Index = 0 sind, und dass sie alle sehr rasch abnehmen, was auch unmittelbar einzusehen ist.

wo nun rechter Hand in allen nach dem Integral folgenden Gliedern $x_0 + nh$ statt x gesetzt werden muss.

Da es ferner einerlei ist, ob man x_0+nh+h statt x in $\varphi(x)$, in $\varphi'(x)$, $\varphi''(x)\cdots$ oder statt dessen, x_0+nh statt x, in $\varphi(x+h)$, in $\varphi'(x+h)$, $\varphi''(x+h)\cdots\cdot$ setzt, so kommt, wenn man diese Ausdrücke statt $\varphi(x)$, $\varphi'(x)$, $\varphi''(x)\cdots\cdot\cdot$, in die Summationsformel § 361 substituirt und zugleich $\varphi(x+h)$, $\varphi'(x+h)\cdots\cdot\cdot$ entwickelt, für die rechte Seite der Summationsformel:

$$\frac{1}{h}\int\varphi(x)\,dx + \varphi(x) + \frac{h}{1\cdot 2}\cdot\varphi'(x) + \frac{h^2}{1\cdot 2\cdot 3}\cdot\varphi''(x) + \cdots\cdot$$

$$-\tfrac{1}{2}\varphi(x) - \frac{h}{2}\cdot\varphi'(x) - \frac{h^2}{1\cdot 4}\cdot\varphi''(x) - \cdots\cdot$$

$$\frac{h}{12}\cdot\varphi'(x) + \frac{h^2}{12}\cdot\varphi''(x) + \cdots\cdot$$

$$\vdots$$

oder gehörig reducirt, für die verlangte Summationsformel:

$$\Sigma\varphi(x) = \frac{1}{h}\int\varphi(x)dx + \tfrac{1}{2}\varphi(x) + \frac{h}{12}\cdot\varphi'(x) - \frac{h^3}{720}\cdot\varphi'''(x) + \frac{h^5}{30240}\cdot\varphi^{\mathrm{V}}(x) - \ldots$$

wo jedoch auf der rechten Seite noch eine Constante hinzugesetzt und dieselbe jedesmal so bestimmt werden muss, dass für $x = x_0$ die Summe $= \varphi(x_0)$ wird, weil, wenn man die rechte Seite innerhalb der Grenzen $\varphi(x_0)$ und $\varphi(x_0 + nh)$ nimmt, das Glied $\varphi(x_0)$ von der Summe ausgeschlossen sein würde.

Es ist einleuchtend, dass wenn das allgemeine Glied einer zu summirenden Reihe, nämlich $\varphi(x)$ und folglich auch das Integral $\int\varphi(x)dx$ eine ganze Function von x ist, die Summe ganz genau gefunden wird, weil dann die Derivirten $\varphi'(x)$, $\varphi''(x)\cdots\cdot\cdot$ zuletzt $= 0$ werden und die Summationsreihe abbricht. In allen andern Fällen aber wird die Summationsreihe selbst eine unendliche und dann kann, indem man nur die ersten bedeutendsten Glieder nimmt, die Summe darnach nur näherungsweise gefunden werden, jedoch für die practischen Zwecke genügend, für welche sie hier aufgestellt worden.

In der Regel ist $h = 1$ und dann ist:

$$\Sigma\varphi(x) = c + \int\varphi(x)\,dx + \tfrac{1}{2}\varphi(x) + \frac{\varphi'(x)}{12} - \frac{\varphi'''(x)}{720} + \frac{\varphi^{V}(x)}{30240} + \cdots\cdot$$

363.

Aufgabe. Man suche die Summe der x ersten Cubiczahlen, nämlich: $1^3 + 2^3 + 3^3 + \cdots\cdot + x^3$.

Auflösung. Hier ist x^3 dass allgemeine Glied der zu summirenden Reihe und $h = 1$, ferner:

$$\varphi(x) = x^3; \qquad \int\varphi(x)\,dx = \frac{x^4}{4}$$

$$\varphi'(x) = 3x^2; \qquad \varphi''(x) = 6x$$

$$\varphi'''(x) = 6; \qquad \varphi^{IV}(x) = 0$$

$$\Sigma(x^3) = \frac{x^4}{4} + \tfrac{1}{2}x^3 + \tfrac{1}{4}x^2 - \tfrac{1}{120} + c$$

Soll die Summe für $x = 0$, Null, oder für $x = 1$, $= 1$ sein, so ist die Constante $c = \frac{1}{120}$.

364.

Aufgabe. Man suche die Summe der x ersten Stammbrüche:

$$\tfrac{1}{1} + \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{3} + \tfrac{1}{4} + \cdots\cdots + \frac{1}{x}$$

Auflösung. Hier ist das allgemeine Glied der Reihe: $\varphi(x) = \frac{1}{x}$, mithin: $\int\varphi(x)dx = lx$, $\varphi'(x) = -x^{-2}$ etc., folglich:

$$\Sigma\left(\frac{1}{x}\right) = c + lx + \frac{1}{2x} - \frac{1}{12x^2} + \frac{1}{120x^4} - \frac{1}{252x^6} + \cdots \quad (1)$$

Die Summe der zehn ersten Glieder der zu summirenden Reihe lässt sich leicht bis auf acht Decimalen genau, unmittelbar finden. Es ist nämlich:

$$\tfrac{1}{1} + \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{3} + \cdots\cdots + \tfrac{1}{9} + \tfrac{1}{10} = 2{,}9289682539.$$

Setzt man in (1) $x = 10$, für welchen Werth von x die auf

$\frac{1}{252x^6}$ folgenden Glieder auf die siebente Decimale keinen Einfluss mehr haben, so hat man zur Bestimmung der Constante c die Summe von zehn Gliedern, nämlich:

$$2{,}92896825 = c + l10 + \frac{1}{20} - \frac{1}{1200} + \frac{1}{120 \cdot 10^4}$$

hieraus folgt (Analysis § 78): $c = 0{,}57721566$, daher:

$$\Sigma\left(\frac{1}{x}\right) = 0{,}57721566 + lx + \frac{1}{2x} - \frac{1}{12x^2} + \frac{1}{120x^4} - + \cdots$$

Setzt man $x = 1000$, so hat man bis auf acht Decimalen genau:

$$1 + \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{3} + \tfrac{1}{4} + \cdots + \tfrac{1}{1000} = 7{,}48547086 \cdots$$

365.

Aufgabe. Man suche die Summe der reciproken Quadrate der natürlichen Zahlen:

$$\tfrac{1}{1} + \tfrac{1}{4} + \tfrac{1}{9} + \tfrac{1}{16} + \cdots + \frac{1}{x^2}$$

Auflösung. Man hat hier:

$$\Sigma\left(\frac{1}{x^2}\right) = c - \frac{1}{x} + \frac{1}{2x^2} + \frac{1}{6x^3} + \frac{1}{30x^5} - \frac{1}{42x^7} + - \cdots$$

Ferner findet man für $x = 10$ durch unmittelbare Rechnung:

$$\tfrac{1}{1} + \tfrac{1}{4} + \tfrac{1}{9} + \cdots + \frac{1}{10^2} = 1{,}54976773 \cdots$$

$$-\frac{1}{10} + \frac{1}{2 \cdot 10^2} - \frac{1}{6 \cdot 10^3} + \frac{1}{30 \cdot 10^5} = -0{,}09516633$$

$$1{,}54976773 = c - 0{,}09516633$$

$$c = 1{,}64493406$$

$$\Sigma\left(\frac{1}{x^2}\right) = 1{,}64493406 - \frac{1}{x} + \frac{1}{2x^2} - \frac{1}{6x^3} + \frac{1}{30x^5} - + \cdots$$

Die Summe von tausend Gliedern ist also bis auf acht Decimalen genau $= 1{,}64393406$ und die Summe der ganzen Reihe $(x = \infty)$ ist bis auf acht Decimalen genau $= 1{,}64493406 \cdots$

Auf dieselbe Weise werden die Summen aller übrigen reciproken Potenzen der natürlichen Zahlen gefunden. Legendre hat diese Summen bis zur 35sten Potenz und bis auf 15 Decimalen genau berechnet. (Siehe Klügel's mathematisches Wörterbuch 4. Theil, woselbst das ausführliche Capitel über Summation der Reihen einen Raum von beinahe 300 Seiten einnimmt.)

366.

In der Wahrscheinlichkeits-Rechnung wird manchmal die Summe der Logarithmen mehrerer auf einander folgenden natürlichen Zahlen erforderlich:

$$\Sigma(lx) = l1 + l2 + l3 + \cdots + lx$$

Hier ist nun $\varphi(x) = lx$, mithin:

$$\int \varphi(x)\,dx = \int lx \cdot dx = x \cdot lx - x$$

$$\varphi'(x) = \frac{1}{x},\quad \varphi''(x) = -x^{-2},\quad \varphi'''(x) = 2x^{-3}$$

$$\varphi^{\mathrm{IV}}(x) = -6x^{-4},\quad \varphi^{\mathrm{V}}(x) = 24x^{-5}$$

$$\Sigma(lx) = c + (x + \tfrac{1}{2}) \cdot lx - x + \frac{1}{12x} - \frac{1}{360x^3} + \frac{1}{1260x^5} - + \cdots (1)$$

In Ermangelung von zehnzifferigen Logarithmen-Tafeln, mittelst welcher man die Summe der zehn ersten Logarithmen bis auf acht Decimalen leicht finden könnte, kann man die Constante c auch auf folgende Weise bestimmen.

Zufolge § 348 ist, wenn man dort den Zähler mit dem Factor $2x$ abbricht, für $x = \infty$:

$$\frac{\pi}{2} = \frac{2 \cdot 2 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 6 \cdots\cdots (2x-2)(2x-2) \cdot 2x}{1 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 7 \cdots (2x-3)(2x-1)(2x-1)}$$

$$l\frac{\pi}{2} = \left\{ \begin{array}{l} 2[l2 + l4 + l6 + \cdots + l(2x-2)] + l2x \\ -2[l1 + l3 + l5 + \cdots + l(2x-1)] \end{array} \right\} \cdots\cdots (2)$$

Für $x = \infty$ fallen in (1) alle auf $-x$ folgende Glieder weg und man hat also für $x = \infty$:

$$l1 + l2 + l3 + \cdots + lx = c + (x + \tfrac{1}{2})\, lx - x \cdots\cdots (3)$$

Setzt man hierin $2x$ statt x, so ist ebenso:

$$l1 + l2 + l3 + \cdots + l2x = c + (2x + \tfrac{1}{2})l2x - 2x \cdots (4)$$

Addirt man linker Hand in (3) zu jedem Gliede $l2$, mithin rechter Hand $xl2$, so ist:

$$l2 + l4 + l6 + \cdots + l2x = c + (x + \tfrac{1}{2})\,lx + xl2 - x \cdots (5)$$

Subtrahirt man beiderseits $l2x = lx + l2$, so ist:

$$l2 + l4 + l6 + \cdots + l(2x - 2) = c + (x - \tfrac{1}{2})\,lx + (x - 1)\,l2 - x$$

$$2[l2 + l4 + l6 + \cdots + l(2x - 2)] + l2x = 2c + 2xlx + (2x - 1)l2 - 2x \cdots (6)$$

Subtrahirt man (5) von (4) und beachtet, dass:

$$(2x + \tfrac{1}{2})\,l2x = (2x + \tfrac{1}{2})(lx + l2), \text{ so ist:}$$

$$l1 + l3 + l5 + \cdots + l(2x - 1) = xlx + (x + \tfrac{1}{2})\,l2 - x$$

$$2[l1 + l3 + l5 + \cdots + (2x - 1)] = 2xlx + (2x + 1)\,lx - 2x \cdot \quad (7)$$

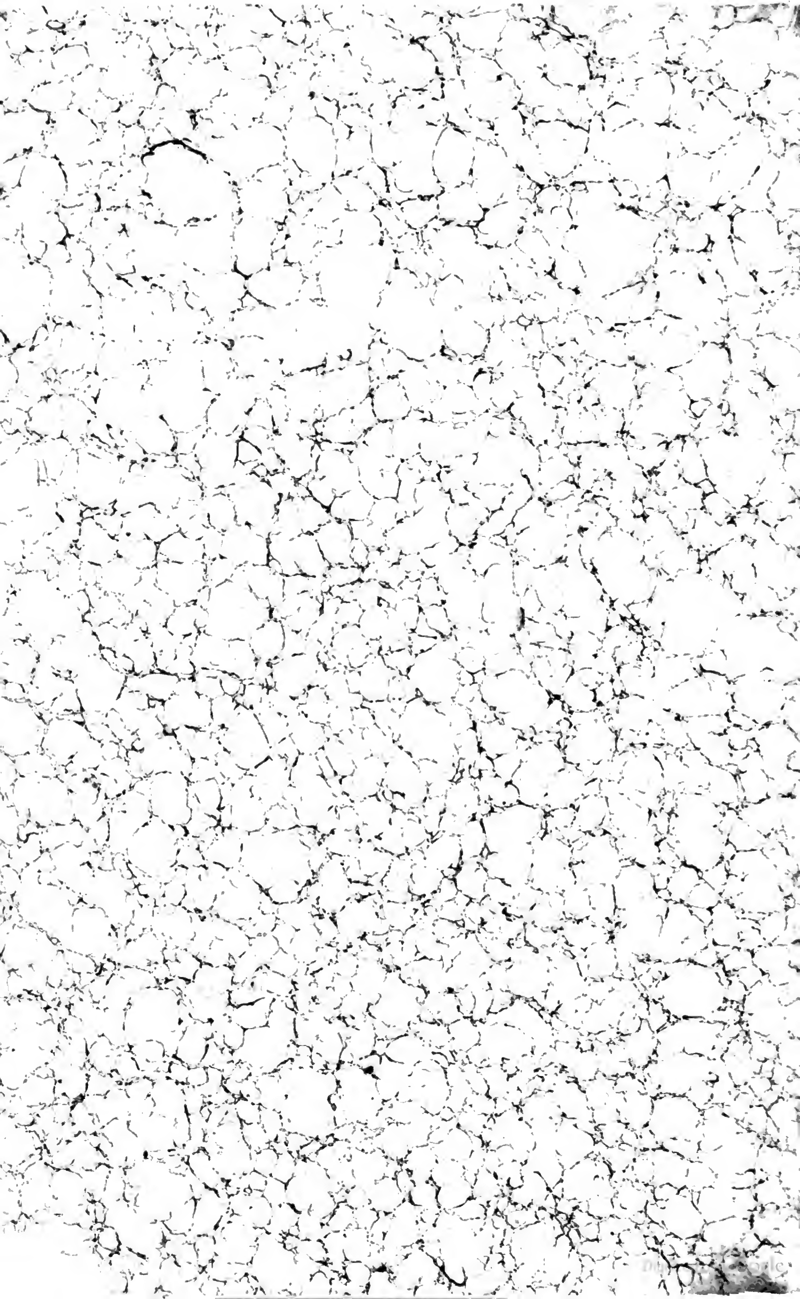
Substituirt man die in (6) und (7) gefundenen Ausdrücke, welche beide für $x = \infty$ gelten, in (2), so hat man zur Bestimmung der Constante c:

$$l\pi - l2 = 2c - 2l2$$
$$2c = l2 + l\pi = l2\pi$$
$$c = \tfrac{1}{2}l2\pi.$$

Substituirt man diesen für c gefundenen Werth in (1), so ist:

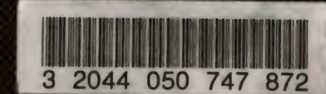
$$\Sigma(lx) = \tfrac{1}{2}l2\pi + (x + \tfrac{1}{2})\,lx - x + \frac{1}{12x} - \frac{1}{360x^3} + - \cdots$$

Druck von **Gustav Esch** in Altona.








3 2044 050 747 872